Nro 286

Geschenk von der Akad. d. Wiss.

Math. P.

59 k – 2

<36635608580012
<36635608580012
Bayer. Staatsbibliothek

R

Lehrbuch
der
Geometrie und Trigonometrie
zum
Gebrauche in den Schulen
und
zum Selbstunterrichte,

von

Johann von Gott Bundschue,

Doktor der Philosophie und Professor der höheren Mathematik an dem königlich-baierischen Lyzeum zu Dilingen, wie auch korrespondirendem Mitgliede der allgemeinen kameralistisch-ökonomischen Gesellschaft zu Erlangen.

Zweiter Theil,
welcher die Stereometrie und ebene Trigonometrie nebst der Anwendung der Geometrie und Trigonometrie auf die Feldmeßkunst enthält.

Mit 7 Figuren-Tafeln.

Kempten, 1822.

Gedruckt und im Verlage bei Dannheimer.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Seiner

Hochwohlgeboren

dem

Königlich-Baierischen

Regierungs-Direktor in Augsburg,

Herrn

Johann Nepomuk von Raiser,

Doktor der Rechte

und

Ritter des Zivil-Verdienst-Ordens
der Baierischen Krone,

widmet

dieses Denkmal

der tiefesten Verehrung

Der Verfasser.

Hochwohlgeborner,

Besonders Hochzuverehrender

Herr Regierungs-Direktor!

Als im Jahre 1816 an den Studien-Instituten die besonderen Lehrer der Mathematik zessirten, wurde ich von dem Gymnasium zu Kempten an das hiesige Lyzeum befördert, und es ward mir dadurch das große Glück zu Theil, Euere Hochwohlgeboren persönlich kennen zu lernen, und in Ihnen einen eben so ausgezeichneten und würdigen Staatsmann, als trefflichen Gelehrten zu verehren, indem Sie schon viele Jahre hindurch als Direktor der königlichen Regierung des Kreises die wichtigsten Geschäfte mit rastlosem Eifer besorgen, und sich zugleich in hohem Grade um die Alter-

thumskunde durch Ihre vorzüglichen Werke verdient machen, in denen Sie Ihre gründlichen und umfassenden literarischen Kenntnisse beurkunden, und die römischen Alterthümer zu Augsburg, und andere Denkwürdigkeiten des Ober-Donau-Kreises Baierns mit einem unermüdeten Fleiße dem gelehrten Publikum aus Liebe für die Wissenschaft und zur Vergrößerung des Ruhmes bekannt machen, den sich die Deutschen in der Erforschung und Sammlung der ehrwürdigen Alterthümer erwerben.

Seitdem ich dahier öffentlicher Lehrer der Mathematik bin, sind mir

Euere Hochwohlgeboren einer meiner vorzüglichsten Gönner. Ich darf mich in allen meinen Angelegenheiten vertrauensvollst an Sie wenden, und immerhin geben Sie mir die offenbarsten Beweise Ihres besonders gnädigen Wohlwollens und Ihrer vorzüglich bethätigten Gewogenheit gegen mich.

Ich statte pflichtschuldigst für die mir bisher erwiesenen vielen Gnaden, und besonders für die meinen Schulschriften geschenkte Protektion meinen innigsten Dank ab, und füge die Versicherung bei, daß ich mich nach Kräften bestreben werde, mich immerhin

des in mich gesetzten hohen Zutrauens würdig zu erhalten.

Indem ich mich Ihrem fortgesetzten gnädigen Wohlwollen und Ihrer ferneren Gewogenheit empfehle, geharre ich mit tiefester Verehrung

Euerer Hochwohlgeboren

Dilingen,
den 20. Mai 1821.

ganz gehorsamster,
dankschuldigster
Dr. Johann Bundschue,
Lyzeal-Professor.

Vorrede.

Der gegenwärtige zweite Theil des Lehrbuches der Geometrie und Trigonometrie enthält, da im ersten Theile die Longimetrie und Planimetrie schon vollständig vorkömmt, die Stereometrie und ebene Trigonometrie nebst der Anwendung der Geometrie und Trigonometrie auf die Feldmeßkunst.

Es war um so mehr ein Bedürfniß, daß dieser zweite Theil zum Drucke befördert wurde, indem der erste Theil der Geometrie mit meinem aus vier Theilen bestehenden Lehrbuche der Arithmethik an öffentlichen Lehranstalten immer größere Aufnahme findet, und sowohl im In- als Auslande immer mehr verbreitet wird, und es auch unschicklich wäre, wenn nicht auch vom nämlichen Verfasser die höheren Zweige in einem und demselben Lehrbuche vorgetragen würden.

Aus diesen Gründen werde ich das gegenwärtige Lehrbuch, wie das der Arithmetik, in weite-

ren Bänden fortsetzen, um in beiden nicht nur die höheren algebraischen Theile, welche in den bisher erschienenen vier Theilen meiner Arithmetik noch nicht vorkommen, sondern auch die fortgesetzte Trigonometrie und die höhere Geometrie abzuhandeln, und auf diese Weise rücksichtlich der gesammten reinen Mathematik ein geordnetes Ganzes herzustellen; was jedem, der sich in der Mathematik nach meinen Schriften bilden will, und deßhalb darnach die Elemente der Algebra und Geometrie studirt oder inne hat, willkommen sein wird, und den Vortheil gewährt, daß ich an dem diesortigen königl. Lyzeum bei meinen öffentlichen mathematischen Vorlesungen auch die schwereren Theile nach meinen eigenen Lehrbüchern vortragen kann, und somit meine Herren Zuhörer außer dem logarithmisch-trigonometrischen Handbuche von Vega, auf das ich mich beim Vortrage der Trigonometrie, und überhaupt bei den logarithmischen Berechnungen beziehe, keines anderen Leitfadens bedürfen.

Weil ich eben jetzt mit der Bearbeitung der neuen Auflage des vierten Theiles meiner Arithmetik beschäftigt bin, in welchen ich in der zweiten Auflage meine Abhandlung über die Begründung und Anwendung des reesischen Ansatzes und die zusammengesetzte Zinsrechnung in beigefügten weiteren Hauptstücken aufnehme, so kann ich die

folgenden Theile des Lehrbuches der Geometrie und Trigonometrie, welche die sphärische Trigonometrie und die Polygonometrie oder Goniometrie nebst der höheren Geometrie enthalten werden, erst späterhin der Presse überliefern.

Wie im ersten Theile der Geometrie, eben so habe ich auch in diesem Theile die Lehrsätze ohne alle Hinweisung auf eine bestimmte Figur dargestellt, und eine solche erst bei der Beweiseführung zitirt, da dieselben ohne alle Konstruktion der Figur verständlich sein müssen, und dem Gedächtnisse einzuprägen sind.

Ich habe bei meinem bisherigen dreizehnjährigen öffentlichen Lehramte immerhin die Bemerkung gemacht, daß der mathematische Unterricht nur dann gedeihen und Früchte bringen kann, wenn die Gegenstände gründlich, deutlich und vollständig behandelt werden, und mir deßhalb wieder bei diesem Theile, besonders bei der ebenen Trigonometrie, wie bei meinen übrigen mathematischen Werken, alle Mühe gegeben, durchgehends einen gründlichen und ausführlichen Vortrag einzuhalten.

Nur bei der praktischen Geometrie und Trigonometrie drückte ich mich etwas kürzer aus, weil es bei der Verfassung eines Lehrbuches für den höheren mathematischen Lyzeal- und Gymnasial-Unterricht meine Absicht nicht sein kann, zur Bil-

dung eines Geodäten oder Feldmessers eine ausführliche Anleitung zu liefern, und ich nur einige Uebungen auf dem Felde zeigte, um durch die vorgenommenen Anwendungen das theoretische Studium auch in dieser Rücksicht angenehm, und für das Geschäftsleben nützlich zu machen.

Die aus der Arithmetik vorkommenden Sätze werden hier, wie im ersten Theile der Geometrie, zitirt, und die Zitation nach diesem letzteren geschieht wie in der Arithmetik. Wenn man z. B. lies't „I. §. 46. oder I. Fig. 12.", so bedeutet es „man sehe im ersten Theile dieses Lehrbuches der Geometrie den §. 46., oder in diesem Theile die Fig. 12. nach;" oder wenn man z. B. lies't „§. 58. oder Fig. 14", so bedeutet es „man sehe im gegenwärtigen zweiten Theile des Lehrbuches der Geometrie und Trigonometrie den §. 58. oder darin die Fig. 14. nach."

Die bisher bemerkten Druckfehler sind am Ende dieses Bandes verbessert; sollten sich noch einige vorfinden, so werden sie in der Arithmetik, deren IV. Theil in neuer Auflage noch diesen Sommer erscheint, angezeigt werden.

Dilingen den 20. Mai 1821.

Professor Bundschue.

Inhalt.

III. Theil der Geometrie.

Die Stereometrie.

I. Hauptstück.

Von körperlichen Winkeln und Körpern überhaupt . . . . . S. 1. §. 1 bis §. 10.

II. Hauptstück.

Von der Gleichheit und den Verhältnissen der Körper.

I. Abschnitt.

Von dem Prisma und dem Zylinder S. 20. §. 11 — §. 20.

II. Abschnitt.

Von der Pyramide und dem Kegel S. 35. §. 21 — §. 26.

III. Abschnitt.

Von der Kugel . . . S. 48. §. 27 — §. 34.

III. Hauptstück.

Von der Ausmessung der Körper und ihrer Oberflächen.

I. Abschnitt.

Von dem Prisma und dem Zylinder S. 65. §. 35 — §. 40.

II. Abschnitt.

Von der Pyramide und dem Kegel S. 75. §. 41 bis §. 47.

III. Abschnitt.

Von der Kugel . . . S. 84. §. 48 — §. 56.

Ebene Trigonometrie.

Einleitung.

Vom Gegenstande der Trigonometrie. S. 103. §. 57 — §. 61.

I. Hauptstück.

Von den Verhältnissen trigonometrischer Linien.

I. Abschnitt.

Von den Verhältnissen trigonometrischer Linien einfacher Bögen und Winkel . S. 109. §. 62 — §. 82.

II. Abschnitt.

Von den Verhältnissen trigonometrischer Linien zusammengesetzter Winkel oder Bögen für den Halbmesser 1. . . . . S. 141. §. 83 — §. 90.

III. Abschnitt.

Von den trigonometrischen Tabellen S. 165. §. 91 — §. 102.

II. Hauptstück.

Von der Auflösung der geradlinigten ebenen Dreiecke.

I. Abschnitt.

Von der Auflösung der rechtwinklichten und gleichschenklichten Dreiecke . . S. 189. §. 103 — §. 111.

II. Abschnitt.

Von der Auflösung der Dreiecke überhaupt.

I. Lehrsätze zur Auflösung der Dreiecke überhaupt S. 213. §. 112 — §. 118.

II. Aufgaben zur Auflösung der Dreiecke überhaupt S. 230. §. 119 bis §. 123.

III. Beispiele zur Uebung in der Auflösung der Dreiecke überhaupt . . . S. 245. §. 124 — 133.

Anwendung der Geometrie und ebenen Trigonometrie auf die Feldmeßkunst.

I. Hauptstück.

Die praktische Geometrie.

I. Abschnitt.

Von dem Gegenstande der Feldmeßkunst S. 287. §. 134 — §. 137.

II. Abschnitt.

Von dem verjüngten Maaßstabe und der Absteckung gerader Linien und geradlinigter Winkel nebst der Vermessung solcher Linien auf dem Felde S. 292. §. 138 — §. 148.

III. Abschnitt.

Von der Messung unzugänglicher Weiten mit bloßen Stäben und Meßketten S. 307. §. 149 — §. 151.

IV. Abschnitt.

Von der Messung unzugänglicher Weiten mit dem Meßtische . . . . S. 314. §. 152 — §. 156.

V. Abschnitt.

Von dem Verfahren, Figuren und überhaupt gebrochene Linien mit bloßen Stäben und Meßketten oder auch mit dem Winkelkreuz oder Winkelrohr in Grund zu legen, und von den ersteren den Flächeninhalt anzugeben . . S. 322. §. 157 — §. 161.

VI. Abschnitt.

Von dem Verfahren, mit dem Meßtische Figuren auf dem Felde aufzunehmen, und ihren Flächeninhalt zu finden . . . S. 332. §. 162 — §. 165.

II. Hauptstück.

Die Anwendung der ebenen Trigonometrie auf die Feldmeßkunst.

I. Abschnitt.

Von der Messung der geradlinigten Winkel auf dem Felde und der Bestimmung unzugänglicher Weiten S. 338. §. 166 bis §. 170.

II. Abschnitt.

Von dem Verfahren, Höhen zu messen, und sowohl Figuren in Grund zu legen, als auch ihren Flächeninhalt zu finden . S. 344. §. 171 — §. 176.

III. Theil der Geometrie.

Die Stereometrie.

I. Hauptstück.

Von körperlichen Winkeln und Körpern überhaupt.

§. 1.
Körperliches Eck.

a) Wenn drei oder mehrere geradlinigte Winkel in verschiedenen Ebenen so liegen, daß sie alle einen Scheitel, und jede zwei nächsten einen Schenkel gemein haben, so heißt die Neigung aller dieser Ebenen zu einander ein körperlicher Winkel, oder ein körperliches Eck (Angulus solidus).

Daher bilden z. B. (Fig. 1.) die drei geradlinigten Winkel ACB, BCD und ACD das körperliche Eck oder den körperlichen Winkel C, wenn dieselben in drei verschiedenen Ebenen so liegen, daß sie den Scheitel C, und die Schenkel CA, CB und CD gemein haben.

b) Die Ebenen, welche beim körperlichen Ecke zum Theile durch die Schenkel der geradlinigten Winkel begränzt werden, heissen die Seitenflächen desselben, und die Neigungswinkel, welche diese zu einander bilden, ihre Winkel.

c) Ein körperliches Eck von drei Seitenflächen heißt ein körperliches Dreieck, von vier ein kör-

perliches Viereck, und von mehr als vier ein körperliches Vieleck.

Daher ist (Fig. 1.) z. B. das körperliche Eck C ein körperliches Dreieck, weil bei demselben die drei Seitenflächen ACB, BCD und ACD vorkommen.

I. Zusatz: Zu einem körperlichen Ecke werden wenigstens drei geradlinigte Winkel, und somit drei Seitenflächen erfordert, weil jene allemal den Scheitelpunkt gemein, und von ihnen jede zwei nächsten einen Schenkel gemein haben (ex def.).

II. Zusatz: Weil geradlinigte Winkel ein körperliches Eck bilden, und bei jenen die Schenkel immer verlängert werden können (I. §. 7. Zus. II.), so bleibt beim körperlichen Ecke der Raum innerhalb derselben nach einer Seite hin unbegränzt; daher können z. B. drei Ebenen wohl ein körperliches Eck (Zus. I.), aber keinen Körper bilden, weil bei ihnen auf einer Seite der Raum unbegränzt ist (I. §. 2. a.).

III. Zusatz: Da in einer Ebene alle geradlinigten Winkel rings um einen Punkt 360 Grad halten (I. §. 11. Zus. IV.), so ist die Summe aller dieser Winkel, welche ein körperliches Eck einschliessen, und in verschiedenen Ebenen liegen, immer kleiner als 360 Grad, damit sie ein Eck, und somit eine Höhlung bilden.

IV. Zusatz: Durch alle geradlinigten Winkel, und die Neigungswinkel jeder zwei Ebenen zu einander ist ein körperliches Eck vollkommen bestimmt.

Daher ist z. B. (Fig. 1.) das körperliche Eck C durch die geradlinigten Winkel ACB, BCD und ACD, und durch die Neigungswinkel der Ebenen ACB, BCD und ACD zu einander bestimmt.

Denn durch den Neigungswinkel der Seitenflächen ACB und BCD ist die Lage dieser zwei Ebenen zu einander bestimmt (I. §. 176. Zus. III.), und durch die Größe des Winkels BCD ist auch die Lage der Durchschnittslinie CD gegeben, was eben so von allen übrigen Seitenflächen und Schenkeln der geradlinigten Winkel gilt, weßhalb ein körperliches Eck durch alle geradlinigten Winkel, und durch die Neigungswin-

kel der Ebenen zu einander vollkommen bestimmt ist (I. §. 6.).

V. Zusatz: Wenn daher in zwei körperlichen Ecken der Ordnung nach alle geradlinigten Winkel, und die Neigungswinkel ihrer Ebenen zu einander gleich sind, so passen sie vollkommen in einander, und sind kongruent (I. §. 1. Zus. I.).

Aus diesem Grunde sind z. B. (Fig. 1.) die körperlichen Ecke C und c kongruent, wenn der Ordnung nach die geradlinigten Winkel ACB, BCD und ACD gleich sind den Winkeln acb, bcd und acd, und jede zwei Ebenen zu einander die nämliche Neigung haben.

Anmerkung: 1) Man unterscheidet bis jetzt Winkel dreierlei Art, nämlich geradlinigte Winkel, welche zwei gerade Linien bilden (I. §. 7. a.), dann Neigungswinkel zweier Ebenen zu einander, welche diese bilden, wenn sie sich in einer Linie schneiden (I. §. 175. b.), und auch Flächenwinkel genannt werden, und endlich körperliche Winkel oder körperliche Ecke.

2) Der III. Zusatz dieses §., daß alle geradlinigten Winkel eines körperlichen Eckes zusammen weniger als 360 Grad halten, kann auch dadurch bewiesen werden, daß man z. B. zeigt, beim körperlichen Dreiecke seien jede zwei geradlinigten Winkel zusammen größer, als der dritte, wie dieses Lorenz, Kiesewetter rc. in ihren mathematischen Lehrbüchern thun. Auch ist aus diesem Zusatze einleuchtend, daß bei körperlichen Ecken nur von hohlen geradlinigten Winkeln, und von hohlen Flächenwinkeln die Rede ist.

3) Die §§. und Figuren zitire ich aus dem ersten Theile dieses Lehrbuches z. B. auf folgende Weise: »(I. §. 7. Zus. II.), oder (I. Fig. 4.),« anstatt daß ich sage: »man sehe im I. Theile dieses Lehrbuches den II. Zusatz des §. 7., oder man sehe im I. Theile desselben die 4te Figur.«

4) Aus der Arithmetik werden die §§., wie im I. Theile des Lehrbuches der Geometrie zitirt.

§. 2.

Oberfläche eines Körpers.

a) Die ganze Gränze, innerhalb deren ein Körper eingeschlossen ist, heißt seine Oberfläche (Superficies).

b) Ein Körper heißt platt, in so ferne seine Oberfläche ebene Figuren, kantig, in so ferne sie Flächenwinkel, und eckigt, in so ferne sie körperliche Ecke enthält; ferner heißt ein Körper rund, wenn seine Oberfläche krumme Flächen (I. §. 4. b.) enthält, ganz rund, wenn sie eine einzige krumme Fläche ist, ganz eckigt, wenn sie aus lauter ebenen Figuren besteht, und von vermischter Gestalt, wenn der Körper zum Theile eckigt, und zum Theile rund ist.

I. Zusatz: Die Oberfläche oder Aussenseite eines Körpers besteht entweder aus mehreren Ebenen, oder aus einer oder mehreren krummen Flächen, oder endlich aus Ebenen und krummen Flächen zugleich.

II. Zusatz: Besteht die Oberfläche eines Körpers aus lauter ebenen Figuren, so werden dazu wenigstens vier Ebenen erfordert, indem drei Ebenen nur ein körperliches Eck bilden, und den Raum nach einer Seite hin unbegränzt lassen (§. 1. Zus. II.).

§. 3.
Reguläre Körper.

a) Ein Körper heißt regulär, wenn er lauter kongruente reguläre ebene Figuren zur Gränze hat, und alle seine körperlichen Ecke kongruent sind.

b) Das Tetraeder (Tetraedrum) ist jener reguläre Körper, der durch vier Dreiecke begränzt ist (Fig. 2.).

c) Das Oktaeder (Octaedrum) ist jener, der durch acht Dreiecke begränzt ist (Fig. 3.); und

d) Das Ikosaeder (Icosaedrum) ist jener reguläre Körper, dessen Gränze zwanzig Dreiecke bilden (Fig. 4.).

e) Ferner wird ein regulärer Körper ein Hexaeder (Hexaedrum), oder Würfel (Cubus) genannt, wenn er durch sechs Vierecke begränzt ist (Fig. 5.); und endlich

f) heißt der reguläre Körper ein Dodekaeder (Dodecaedrum), wenn seine Gränze aus zwölf Fünfecken besteht (Fig. 6.).

I. Zusatz: Jeder Winkel eines regulären oder gleichseitigen Dreieckes hält 60 Grad (I. §. 43. Zus. IV.), mithin beträgt die Summe dreier solcher Winkel, welche die Ecke des Tetraeders einschließen, 180 Grad; vier solche Winkel, welche die Ecke des Oktaeders bilden, halten zusammen 240°; und fünf solche Winkel, welche ein Eck des Ikosaeders ausmachen, betragen 300 Grad. Da nun sechs oder noch mehrere solche Winkel 360 Grad, oder darüber ausmachen, so schließen sie kein körperliches Eck ein (§. 1. Zus. III.), folglich gibt es außer dem Tetraeder, Oktraeder und Ikosaeder keinen anderen regulären Körper, dessen Gränzen Dreiecke sind.

II. Zusatz: Jeder Winkel eines Quadrates oder regulären Viereckes hält 90 Grad (I. §. 50. Zus. I.), daher betragen drei solche Winkel 270 Grad; da nun vier solche Winkel schon 360° ausmachen würden, so gibt es außer dem Würfel, dessen Ecke drei rechte Winkel bilden, keinen regulären Körper, dessen Gränze aus Vierecken besteht.

III. Zusatz: Ein Winkel des regulären Fünfeckes hält 108 Grad (I. §. 53. Zus.), deßhalb betragen drei solche Winkel, die zu einem körperlichen Ecke erfordert werden, 324 Grad; da nun vier solche Winkel schon 432 Grad betragen würden, so gibt es außer dem Dodekaeder keinen regulären Körper, der durch Fünfecke begränzt ist.

IV. Zusatz: Jeder Winkel eines regulären Sechseckes hält 120 Grad, somit drei solche Winkel, die zu einem körperlichen Ecke erfordert würden, hielten schon 360, und mehr als drei solche Winkel, hielten mehr als 360 Grad; aus diesem Grunde gibt es keinen regulären Körper, der durch Sechsecke begränzt ist.

Und überhaupt gibt es außer den 5 angeführten regulären Körpern (§. 3. b bis f.) keinen anderen regulären Körper, weil hierzu schon der Winkel des regulären Sechseckes zu groß ist, und der Polygonswinkel desto größer wird, je größer die Anzahl der Seiten eines regulären Vieleckes ist, da derselbe im regulären Vielecke nach dem im I. Theile im §. 53.

angeführten Zusatze gleich $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$ ist, und der Werth des Bruches $\frac{360^\circ}{n}$ um so kleiner wird, je größer n oder die Anzahl der Seiten ist (Arithm. III. §. 66. h.), und deßhalb die Differenz $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$, oder der Polygonswinkel um so größer ist, je größer die Anzahl der Seiten wird (Arithm. I. §. 34. III.).

§. 4.

Aufgabe, die erwähnten fünf regulären Körper auf dem Papier zu zeichnen.

Auflösung:

Die angeführten fünf regulären Körper können auf folgende Weise auf dem Papier gezeichnet werden.

a) Das Tetraeder:

Man zeichne (Fig. 2.) das gleichschenklichte Dreieck ADC, und über die Basis AC auf der nämlichen Seite das größere Dreieck ABC (I. §. 19. Zus. II.), und ziehe die gerade Linie BD, man erhält dadurch das verlangte Tetraeder;

b) Das Oktaeder:

Man zeichne (Fig. 3.) das Quadrat AC (I. §. 51. Anmerk. 1.), und ziehe die beiden Diagonalen AC und BD, man erhält dadurch das Oktaeder;

c) Das Ikosaeder:

Man verzeichne (Fig. 4.) ein reguläres Sechseck (I. §. 124.), und beiläufig in der Mitte desselben das gleichseitige Dreieck eso, dessen Seite so groß ist, als eine Seite des Sechseckes; dann ziehe man von jedem Ecke des Dreieckes allemal zu den nächsten drei Ecken des Sechseckes drei gerade Linien, daher vom Ecke s die Linien sb, sc und sd, dann vom Ecke o die Linien od, oe und of, und vom Ecke r die Linien rb, ra und rf; man erhält dadurch das verlangte Ikosaeder;

d) Das Hexaeder oder der Würfel;

Man verzeichne (Fig. 5.) das Quadrat ac (I. §. 51. Anmerk. 1.), und die Linie de, welche mit ad unter einem stumpfen Winkel zusammenstoßt, mache man gleich ad, ferner beschreibe man mit dem Halbmesser ad von a, b und c aus bei h, g und f Bögen, und schneide diese durch Bögen, die von e und f aus beschrieben werden, und ziehe die Linien ah, eh und gh punktirt, und die rechten Linien ef, bg und fg; man erhält dadurch den verlangten Kubus oder Würfel;

e) Endlich das Dodekaeder:

Man zeichne (Fig. 6.) mit dem Halbmesser cg einen Kreis, und beschreibe in denselben das reguläre Zehneck abdefghikl (I. §. 127. Anmerk. 2.); man ziehe ferner den Radius cg, nehme darauf gp beinahe gleich dem halben Radius gc, und trage von den Ecken b, e, g, i und l in der Richtung nach dem Mittelpunkte c die Linie gp auf, so daß gp = en = bm = lr = iq, und verbinde die Punkte m, n, p, q und r durch gerade Linien, um das Fünfeck mnpqr zu erhalten, so stellt die Figur ein Dodekaeder dar.

Anmerkung: 1) Die angeführten fünf regulären Körper lassen sich auf folgende Weise aus Papier verfertigen.

a) Das Tetraeder:

Man zeichne (Fig. 7.) das gleichseitige Dreieck abc, halbire jede Seite desselben, und ziehe die Linien de, df und fe.

b) Das Oktaeder:

Man zeichne (Fig. 8.) das gleichseitige Dreiecke abc, und theile es, wie vorhin, in vier kongruente Dreiecke, dann verlängere man ac, und mache die Verlängerung cg gleich cf, also daß cg = $\frac{1}{2}$ ac; dann errichte man auf der unteren Seite über fg das gleichseitige Dreieck fpg, und theile dieses ab, wie das vorige Dreieck abc.

c) Das Ikosaeder:

Man ziehe (Fig. 9.) die Linie ms, und theile diese in fünf gleiche Theile, dann ziehe man unter den Winkel ams, der gleich 60 Grad ist, die Linie ma, und mache sie gleich mn, also = $\frac{1}{5}$ ms; über am und ms, und dem Winkel ams zeichne man das Parallelogramm me (I. §. 49.), und theile die Seite ae ebenfalls in fünf gleiche Theile; die Theilungspunkte verbinde man durch die Linien an, nc, cp ꝛc., um das Parallelogramm me in

10 kongruente Dreiecke man, anc ꝛc. zu theilen; endlich errichte man oben und unten über jeden Theil der Linien ae und ms die weiteren 10 kongruenten Dreiecke abc, cde ꝛc.

d) Das Hexaeder oder der Würfel:

Man theile (Fig. 10.) die Linie bg in 4 gleiche Theile, errichte auf einer Seite über jeden Theil ein Quadrat, somit die Quadrate ac, ed, fo und gm, und zeichne auf beiden Seiten über ae und do die zwei neuen Quadrate ep und or (I. §. 51. Anmerk. 1.).

e) Endlich das Dodekaeder:

Man verzeichne (Fig. 11.) das reguläre Fünfeck abcde (I. §. 127. Anmerk. 2.), und über jede Seite desselben ein reguläres Fünfeck, welches mit dem ersten Fünfecke kongruent, indem man über be das Dreieck bfc konstruirt, das mit dem Dreiecke edb kongruent ist, und dann über bf und cf Dreiecke bildet, die mit den Dreiecken eab und dcb kongruent sind, und man eben so bei allen übrigen verfährt. Hat man auf diese Weise die 6 ersten kongruenten Fünfecke erhalten, so verfahre man ganz nach dieser Vorschrift, um an eine Seite hin, etwa an mn, die übrigen 6 regulären Fünfecke zu bekommen, die unter sich, und mit den vorigen Fünfecken kongruent sind.

Nach diesen Regeln erhält man die regulären Figuren, welche die ganze Oberfläche bilden; werden nun sie an den Durchschnittslinien zusammengefügt, so erhält man die verlangten fünf regulären Körper.

§. 5.

Lehrsatz:

Körper, welche gleich viele ähnliche Seitenflächen, und kongruente körperliche Winkel der Ordnung nach haben, sind einander ähnlich.

Beweis:

1) Die Qualität eines geometrischen Körpers (I. §. 2. a.) ist durch die Anzahl, Beschaffenheit und Lage der Seitenflächen, somit durch die Art und Weise bestimmt, wie derselbe begränzt ist;

2) Haben nun die Körper gleich viele Seitenflächen, und sind diese einander ähnlich, und die körperlichen Winkel der Ordnung nach kongruent, so haben

sie gleiche Qualität, und sind deßhalb einander ähnlich (Arithm. I. §. 2. h.).

Daher sind z. B. die beiden Würfel af und in (Fig. 5.) ähnlich, weil jeder durch sechs Vierecke begränzt ist, dann diese als Quadrate einander ähnlich (I. §. 90. Zus. IV.), und die körperlichen Winkel kongruent sind (§. 1. Zus. V.).

I. Zusatz: Weil ähnliche Körper gleiche Qualität haben, so haben Linien, die bei solchen Körpern auf eine ähnliche Art gezogen werden, ein gleiches Verhältniß, und man sagt deßwegen, daß dieselben zu einander proportionirt sind (I. §. 81. Anmerk.).

II. Zusatz: Haben die Körper zu ihrer Gränze gleich viele kongruente Seitenflächen, und sind bei ihnen alle körperlichen Ecke kongruent, so passen sie vollkommen in einander, sie haben dann nicht nur eine gleiche Qualität, sondern auch eine gleiche Quantität, und sind deßwegen kongruent (Arithm. I. §. 2. h.).

Anmerkung: Wie bei den Figuren (I. §. 139. Anmerk.), so muß man auch bei den Körpern die Aehnlichkeit, Gleichheit und Kongruenz wohl unterscheiden. Haben zwei Körper gleiche Qualität, so sind sie ähnlich; haben sie gleiche Quantität, das ist, schließen sie einen gleich großen Raum ein, so sind sie gleich, und haben sie endlich gleiche Qualität und gleiche Quantität zugleich, so sind sie kongruent.

§. 6.

Prisma.

a) Ein Körper heißt ein Prisma (Ecksäule), wenn er durch zwei geradlinigte parallele kongruente ebene Figuren, und durch so viele Parallelogramme begränzt ist, als jede jener beiden Figuren Seiten hat.

b) Die beiden geradlinigten parallelen kongruenten Figuren heissen die Grundflächen, und die Parallelogramme die Seitenflächen des Prisma.

c) Ein Perpendikel, das von einem Punkte der einen Grundfläche auf die andere gezogen wird, heißt die Höhe, und jede Durchschnittslinie zweier Seitenflächen eine Seite oder Kante des Prisma.

d) Ein Prisma heißt senkrecht oder schief, je nachdem die Seitenflächen senkrecht oder schief auf den Grundflächen stehen.

e) Prismen heissen endlich drei-, vier- oder vieleckicht, wenn ihre Grundflächen Dreiecke, Vierecke, oder Vielecke sind.

Daher ist (Fig. 12.) der Körper AG ein Prisma, die Vierecke AC und EG, welche parallel und kongruent sind, sind die Grundflächen, die Parallelogramme AH, AF, BG und DG sind die Seitenflächen, das Perpendikel HU ist die Höhe, und die Durchschnittslinien AE, BF, CG und DH sind die Seiten oder Kanten dieses Prisma, welches, weil die Grundflächen Vierecke sind, viereckicht ist, und ein senkrechtes Prisma genannt wird, wenn die Seitenflächen AF, BG ꝛc. auf den Grundflächen AC und EG senkrecht stehen.

I. Zusatz: Wenn eine Seite oder Seitenfläche auf einer der zwei parallelen Grundflächen senkrecht steht, so steht sie allemal auf der andern auch senkrecht (I. §. 180. und §. 182.).

II. Zusatz: Im Prisma sind alle Seiten zu einander parallel und gleich. Denn (Fig. 12.) die Seitenflächen des Prisma sind Parallelogramme, und bei diesen ist $AE \underline{\underline{\#}} BF$, dann $BF \underline{\underline{\#}} CG$, und $CG \underline{\underline{\#}} DH$ (I. §. 48. a. und §. 48. Zus. V.), folglich sind alle Seiten zu einander parallel (I. §. 172. Zus.), und gleich.

III. Zusatz: Im Prisma ist die Höhe immer die nämliche, man mag von was immer für einem Punkte der einen Grundfläche auf die andere das Perpendikel ziehen (I. §. 179. Zus. V.).

IV. Zusatz: Im senkrechten Prisma steht jede Seite auf den Grundflächen senkrecht; weil die Seitenflächen selbst, also auch ihre Durchschnittslinien auf denselben senkrecht stehen (I. §. 178.).

V. Zusatz: Wenn eine Seite auf einer Grundfläche senkrecht steht, so stehen alle übrigen Seiten darauf senkrecht (I. §. 172. B.), und deßhalb stehen

auch die Seitenflächen auf dieser Grundfläche senkrecht (I. §. 177.), und das Prisma ist dann senkrecht (Zus. I.).

VI. Zusatz: Im senkrechten Prisma ist jede Seite zugleich die Höhe desselben (I. §. 179. Zus. V.).

§. 7.

Zylinder.

a) Ein Körper heißt ein Zylinder oder eine Walze, wenn er von zwei gleichen parallelen Kreisen, und einer solchen krummen Fläche begränzt ist, daß jede gerade Linie von der einen Kreislinie zur andern ganz in der krummen Fläche liegt, wenn sie mit jener geraden Linie parallel gezogen wird, welche die Mittelpunkte der beiden Kreise verbindet.

b) Die beiden Kreise heissen die Grundflächen, und die dritte krumme Fläche heißt die Seitenfläche des Zylinders.

c) Die gerade Linie, welche die beiden Mittelpunkte der parallelen Kreise verbindet, heißt die Axe, dann jede gerade Linie, welche von der einen Kreislinie zur anderen parallel mit der Axe an der Seitenfläche gezogen wird, heißt eine Seite, und jedes Perpendikel von der einen Grundfläche zur anderen wird die Höhe des Zylinders genannt.

d) Steht die Axe auf den Grundflächen senkrecht, dann heißt der Zylinder senkrecht, und schief wird er genannt, wenn die Axe auf der Grundfläche schief aufsteht.

Daher ist (Fig. 13.) der Körper AF ein Zylinder, die um C und E beschriebenen gleichen parallelen Kreise sind die beiden Grundflächen, die Linie EC, welche die Mittelpunkte der Kreise verbindet, ist die Axe, die krumme Fläche ADFB ist die Seitenfläche, und die mit der Axe EC in der Seitenfläche parallelen Linien DA und FB sind die Seiten des Zylinders. Steht ferner die Axe EC auf den Grundflächen senkrecht, so ist der Körper AF ein senkrechter Zylinder, steht aber (Fig. 14.) die Axe ec auf den

Grundflächen schief, so ist der Körper af ein schiefer Zylinder. Endlich sind (Fig. 13. und 14.) die Perpendikel EC und eg die Höhen dieser Zylinder.

I. Zusatz: Ist eine gerade Linie von einem Punkte der oberen Grundfläche auf der unteren senkrecht, so steht sie allemal auf beiden Grundflächen senkrecht (I. §. 180.), und sie ist zugleich die Höhe des Zylinders, welche immer gleich groß ist, man mag dieselbe von was immer für einem Punkte der einen Grundfläche auf die andere ziehen (I. §. 179. Zus. V.).

II. Zusatz: Im Zylinder ist jede Seite der Axe gleich, und die Seiten haben mit der Axe gegen die Grundfläche gleiche Neigungswinkel.

Denn (Fig. 13.) legt man durch die drei Punkte A, C und E eine Ebene, so schneidet diese die untere Grundfläche in der geraden Linie AC, also vergrößert auch die obere in einer geraden Linie DE (I. §. 179. Zus. IV.), daher ist DE mit AC parallel (I. §. 179. Zus. II.), und DA ⋕ EC, mithin ist DA = EC (I. §. 41. Zus. IV.). Was von der Seite DA, die man beliebig angenommen hat, bewiesen ist, gilt aus den nämlichen Gründen von jeder anderen Seite, und jede Seite hat, weil sie mit der Axe parallel ist, gegen die Grundflächen den nämlichen Neigungswinkel, wie die Axe: ist der Zylinder senkrecht, so stehen die Seiten wie die Axe, auf den Grundflächen senkrecht (I. §. 172. B.); ist aber der Zylinder schief, so bilden die Seiten mit der Axe gegen die Grundfläche gleiche schiefe Neigungswinkel (I. §. 176. Zus. I.).

III. Zusatz: Alle Seiten eines Zylinders sind einander gleich, und haben gegen die Grundflächen einerlei Neigung; weil jede Seite der Axe gleich ist, und mit der Axe gegen die Grundflächen die nämliche Neigung hat (Arithm. I. §. 10. Nro. 4.).

IV. Zusatz: Ist beim Zylinder eine Seite auf den Grundflächen senkrecht, so ist es auch die Axe (I. §. 172. B.), und der Zylinder selbst ist senkrecht.

V. Zusatz: Im senkrechten Zylinder ist die Axe, und jede Seite der Höhe gleich; da jede Seite, wie die Axe, auf den Grundflächen senkrecht steht.

§. 8.

Pyramide.

a) Pyramide (Spitzsäule) heißt jener Körper, der von einer beliebigen geradlinigten Figur, und so vielen Dreiecken, als diese Seiten hat, der Art begränzt ist, daß letztere in einem Punkte außer jener geradlinigten Figur zusammen laufen.

b) Die beliebige geradlinigte Figur nennt man die Grundfläche, die anliegenden Dreiecke die Seitenflächen, und der Punkt, in welchem die Dreiecke zusammen laufen, die Spitze der Pyramide.

c) Das Perpendikel, welches von der Spitze auf die Grundfläche gezogen wird, heißt die Höhe, und die Durchschnittslinien der Seitenflächen heissen die Kanten oder Seiten der Pyramide.

d) Die Pyramide heißt gleich- oder ungleichseitig, je nachdem ihre Seiten gleich oder ungleich sind; endlich heißt die Pyramide dreieckicht, viereckicht, oder vieleckicht, je nachdem ihre Grundfläche ein Dreieck, Viereck oder Vieleck ist.

e) Wird die Pyramide mit einer zur Grundfläche parallelen Ebene durchschnitten, so heißt der zwischen diesen beiden Parallelebenen enthaltene Theil der Pyramide eine abgekürzte Pyramide (Pyramis decurtata), und die beiden Parallelebenen heissen die Grundflächen, während ihre Entfernung die Höhe der abgekürzten Pyramide genannt wird.

Daher ist (Fig. 15.) der Körper CBEDA eine Pyramide, das Viereck CBED ist die Grundfläche, die Dreiecke CAB, BAE ꝛc. sind die Seitenflächen, der Punkt A ist die Spitze, das Perpendikel AK ist die Höhe, und die Durchschnittslinien AC, AB ꝛc. sind die Kanten oder Seiten der Pyramide. Ferner ist diese Pyramide gleichseitig, wenn alle ihre Seiten AC, AB ꝛc. einander gleich sind, und dieselbe ist viereckicht, weil die Grundfläche CBED ein Viereck ist. Schneidet endlich die Ebene GM die Pyramide parallel zur Grundfläche BD, so ist das untere Stück BM die abgekürzte Pyramide, dann die parallelen Vierecke

BD und GM sind die Grundflächen, und das Perpendikel NK ist die Höhe derselben, da es von einem Punkte der oberen Grundfläche auf die untere gezogen ist.

Zusatz: Wenn in einer gleichseitigen Pyramide die Grundfläche eine reguläre Figur ist, so sind alle Seitenflächen zusammen so groß, als ein Dreieck, das den Perimeter der Grundfläche zur Grundlinie, und die Entfernung der Spitze von einer Seite der Grundfläche zur Höhe hat. Denn da hier auch alle Seiten der Grundfläche einander gleich sind (I. §. 13. b.), so sind alle Seitenflächen kongruent (I. §. 24.), folglich von gleicher Höhe, wenn man die Spitze der Pyramide als die gemeinschaftliche Spitze der Dreiecke annimmt (I. §. 44. Zus. II.), und deßhalb sind alle Seitenflächen zusammen so groß, als das angezeigte Dreieck (I. §. 143. Zus. II.).

§. 9.

Kegel.

a) Ein Körper, welcher von einer Kreisebene und einer krummen Fläche begränzt wird, die durch die Peripherie jener Kreisebene geht, und sich in einem Punkte außerhalb des Kreises so endet, daß jede gerade Linie aus diesem Punkte nach einem Punkte der Kreislinie ganz in dieser krummen Fläche liegt, heißt ein Kegel (Conus).

b) Die Kreisebene heißt die Grundfläche, die krumme Fläche die Seitenfläche, und der Punkt, in welchem sich diese endet, die Spitze des Kegels.

c) Eine gerade Linie, welche von der Spitze zum Mittelpunkte der Grundfläche gezogen wird, heißt die Axe, das Perpendikel von der Spitze auf die Grundfläche nennt man die Höhe, und jede gerade Linie, welche von der Spitze zur Peripherie der Grundfläche geht, heißt die Seite des Kegels.

d) Ein Kegel heißt senkrecht oder schief, je nachdem die Axe auf der Grundfläche senkrecht oder schief steht; und endlich heißt der Kegel gleichsei-

tig, wenn alle Seiten einander gleich, und ungleichseitig, wenn dieselben ungleich sind.

e) Schneidet man den Kegel mit einer Ebene parallel zur Grundfläche, so heißt der zwischen den Parallelebenen enthaltene Theil ein abgekürzter Kegel (Conus decurtatus); die Parallelebenen heissen die Grundflächen, und ihre Entfernung, welche durch ein Perpendikel von einem Punkte der oberen Grundfläche zur unteren bestimmt wird, heißt die Höhe des abgekürzten Kegels.

Deßhalb ist (Fig. 16.) der Körper BAE ein Kegel, der Kreis BE die Grundfläche, die krumme Fläche BDEHA die Seitenfläche, und der Punkt A die Spitze des Kegels. Ferner ist die gerade Linie AC die Axe, und zugleich die Höhe, wenn sie auf der Grundfläche BE senkrecht steht, und die Linien AB, AD, BE ꝛc. sind Seiten des Kegels. Der Kegel BAE bei Figur 16. ist senkrecht oder gerad, und der Kegel BAE bei Figur 17. ist schief, wenn die Axe AC bei jenem auf der Grundfläche senkrecht, und bei diesem darauf schief steht, gleichwie jener ein gleichseitiger, und dieser ein ungleichseitiger Kegel ist, wenn im ersten Falle die Seiten AB, AD, AE ꝛc. gleich, und im zweiten dieselben ungleich sind. Endlich ist (Fig. 16 und 17.) das Stück BN, welches zwischen den zwei Parallelebenen FN und BE liegt, der abgekürzte Kegel, die Ebenen FN und BE sind die Grundflächen, und das Perpendikel MC, welches ihre Entfernung bestimmt, ist die Höhe des abgekürzten Kegels.

I. Zusatz: Der senkrechte Kegel ist allemal gleichseitig. Denn man nehme (Fig. 16.) in der Peripherie der Grundfläche zwei beliebige Punkte B und E an, und ziehe die Seite BA und AE, wie auch die Axe AC, und die Radien BC und CE. Weil nach der Voraussetzung der Kegel senkrecht ist, so ist der Winkel ACB = ACE = 90 Grad (I. §. 169. a.), ferner ist CB = CE (I. §. 14. Zus. IV.), und AC = AC, also △ BAC ≅ △ ACE (I. §. 20.), und die Seiten AB und AE sind einander gleich (I. §. 18. Zus. IV.). Was von den zwei Seiten AB und AE

wegen der beliebig angenommenen Punkte B und E erwiesen ist, gilt aus den nämlichen Gründen von allen übrigen Seiten; es ist deßhalb ein senkrechter Kegel immer auch gleichseitig.

II. Zusatz: Umgekehrt ist der gleichseitige Kegel immer auch senkrecht. Nimmt man (Fig. 16.) zu den vorigen Punkten B und E, welche die Endspunkte des Durchmessers BE sind, noch den beliebigen Punkt D in der Peripherie der Grundfläche an, und zieht man zu den vorigen Linien die Linien CD und AD, so ist

AB = AE (per hyp.),
dann CB = CE (I. §. 14. Zus. IV.),
und AC = AC,

also △ACB ≌ △ACE (I. §. 24.),
mithin der Winkel ACB = ACE = 90 Grad (I. §. 18. Zus. IV. und I. §. 8. c.);

ferner ist AD = AB,
dann CB = CD,
und AC = AC,

folglich △ACB ≌ △ACD,
und ACB = ACD = 90 Grad.

Weil nun die Axe AC auf CB und CD senkrecht steht (I. §. 9. Zus. IV.), so steht sie auf der Grundfläche senkrecht (I. §. 170.), und der gleichseitige Kegel ist auch senkrecht.

III. Zusatz: Es ist demnach der schiefe Kegel immer ungleichseitig, und der ungleichseitige ist schief.

IV. Zusatz: Im abgekürzten Kegel ist die obere Grundfläche ebenfalls ein Kreis, und das Zentrum dieses Kreises liegt auch in der Axe. Weil man (Fig. 16.) den abgekürzten Kegel dadurch erhält, daß man ihn mit einer Ebene parallel zur Grundfläche schneidet, so ist die Durchschnittsfigur oder die obere Grundfläche FN parallel mit der unteren Grundfläche BE; nimmt man nun in der Peripherie der unteren Grundfläche beliebig die Punkte D und B an, und legt man durch die Punkte A, C und D, und durch A, C und B Dreiecksebenen, so schneiden diese auch die Ebene FN (I. §. 179. Zus. IV.), und die

Durch-

Durchschnittslinien MP und CD, wie auch MF und CB sind parallel (I. §. 179. Zus. II.); daher verhält sich (I. §. 82.)

$$AM : AC = MP : CD,$$
und $$AM : AC = MF : CB,$$
also $$MP : CD = MF : CB$$ (Arithm. IV. §. 43.).

Es ist aber $CD = CB$ (I. §. 14. Zus. IV.) also auch $MP = MF$ (Arithm. IV. §. 35. Zus. III.), das heißt, die Durchschnittsfigur oder die obere Grundfläche FN ist auch ein Kreis (I. §. 14. a.), und sein Zentrum M liegt in der Axe AC.

Anmerkung: 1) Aus dem, daß man (Fig. 16.) beweiset, es sei die Linie MP gleich MF, folgert man ganz richtig, es sei der Punkt M von allen Punkten des Perimeters der oberen Grundfläche gleich weit entfernt, und deßhalb diese auch ein Kreis. Denn aus den nämlichen Gründen, aus welchen die Gleichheit der Linien MP und MF dargethan wird, folgt, daß auch alle übrigen Linien vom Punkte M bis zur Gränze der Figur gleich sein müssen, und also die Durchschnittsfigur, wie die Grundfläche, ein Kreis, und der Punkt M das Zentrum ist; indem die Durchschnittslinien aller Dreiecksebenen, die man sich ringsherum vorstellt, parallel, und somit nach den bestehenden geometrischen Proportionen oben die Linien MP, MF, MN ꝛc. einander gleich sind, gleichwie es unten die Radien CD, CB, CE ꝛc. sind.

2) Beim schiefen Kegel fällt die Höhe mit der Axe nicht zusammen, und deßhalb entweder noch auf einen Punkt der Grundfläche außer ihrem Zentrum, oder auf die Verlängerung der Grundfläche, wie dieses bei Fig. 17. der Fall ist, wo die Höhe AQ außer der Grundfläche BE auf ihre Verlängerung fällt.

§. 10.

Kugel.

a) Ein Körper, dessen Oberfläche allenthalben von einem Punkte gleich weit absteht, heißt eine **Kugel** (Sphaera, globus).

b) Der Punkt, von welchem alle Punkte der Oberfläche gleich weit abstehen, heißt der **Mittelpunkt** — das **Zentrum**, und jede gerade Linie

vom Zentrum bis zur Oberfläche der Kugel heißt ein Radius oder Halbmesser der Kugel.

c) Eine gerade Linie zwischen zwei Punkten der Oberfläche der Kugel heißt Sehne oder Chorde, und wenn sie durch den Mittelpunkt der Kugel geht, ein Durchmesser oder Diameter der Kugel.

d) Eine ebene Figur, welche die Kugel und ihre Oberfläche in zwei Theile theilet, heißt ein Kugelschnitt, oder die Durchschnittsfigur (Sectio Sphaerica), und die beiden Theile heißen die dazu gehörigen Abschnitte, oder Segmente der Kugel, und der Kugel-Oberfläche.

e) Denkt man sich von allen Punkten des Perimeters eines Kugelschnittes zum Mittelpunkte der Kugel gerade Linien, so nennt man das auf diese Weise von der Kugel ausgeschnittene Stück einen Ausschnitt oder Sektor der Kugel.

Daher ist (Fig. 18.) der Körper ADBE eine Kugel, der Punkt C, von dem alle Punkte der Oberfläche gleich weit abstehen, ist das Zentrum oder der Mittelpunkt, und die Linien CE, CB ꝛc. sind Radien oder Halbmesser, die gerade Linie DF ist überhaupt eine Sehne, und die Chorde DE ein Durchmesser der Kugel.

Die Ebene AFGBH, welche die Kugel schneidet, ist ein Kugelschnitt, dann die beiden Theile AEB und ADB, in welche die Kugel getheilt wird, sind die Segmente, und das Stück der Kugel AEBHC ist ein Ausschnitt oder Sektor der Kugel.

I. Zusatz: Alle Radien oder Halbmesser der Kugel sind einander gleich; indem alle Punkte der Oberfläche vom Zentrum gleich weit abstehen (ex def.), und die Entfernung zweier Punkte durch die gerade Linie bestimmt wird (I. §. 3. Zus. II.).

II. Zusatz: Eben so sind alle Durchmesser oder Diameter der Kugel einander gleich, da jeder Durchmesser zwei Radien in sich hält.

III. Zusatz: Um das Zentrum ist durch den Radius die Oberfläche der Kugel, und diese letztere selbst bestimmt. Denn wäre noch eine zweite Kugeloberfläche möglich, so müßte wenigstens ein Punkt von ihr

nicht in der ersteren Oberfläche liegen, mithin vom Zentrum entweder weiter weg, oder ihm näher sein. Beides ist aber unmöglich, weil im ersten Falle ihr Radius größer, und im zweiten kleiner wäre, als der Halbmesser der ersten Kugeloberfläche; es ist also durch den Radius die Oberfläche, und die Kugel selbst gegeben, oder vollkommen bestimmt (I. §. 6.).

IV. Zusatz: Kugeln und Kugeloberflächen von gleichen Radien oder gleichen Durchmessern sind demnach kongruent (I. §. 6. Zus.).

Anmerkung: 1) Körper, die durch andere krumme Flächen begrenzt sind, gehören in das Gebiet der höheren Geometrie, welche einen Theil der höheren Mathematik ausmacht; dieselbe befaßt sich außer der Kreislinie, welche schon in der niederen Geometrie vorkömmt, mit allen krummen Linien oder Kurven, und mit Flächen und Körpern, die sich nicht durch gerade, oder Kreislinien darstellen lassen (Arithm. I. §. 7. b.).

2) In der niederen Geometrie werden die Untersuchungen gewöhnlich nur auf das Prisma, den Zylinder, die Pyramide, den Kegel, und die Kugel eingeschränkt, wiewohl überhaupt alle jene Körper dahin gehören, derer Gränzen Ebenen oder krumme Flächen sind, welche durch Kreislinien dargestellt werden können.

II. Hauptstück.

Von der Gleichheit und den Verhältnissen der Körper.

I. Abschnitt.

Von dem Prisma und dem Zylinder.

---

§. 11.

Aufgabe, aus der gegebenen Grundfläche, und einer Seite, deren Größe und deren Lage zur Grundfläche gegeben ist, ein Prisma zu beschreiben.

Auflösung:

1) Es sei (Fig. 12.) das Viereck AC als Grundfläche, und die Größe der Seite AE nebst ihrer Neigung zur Grundfläche AC gegeben;

2) Man ziehe durch alle übrigen Ecke der Grundfläche, mithin durch B, C und D mit der gegebenen Seite AE die Parallelen BF, CG und DH (I. §. 39.), und mache sie wenigstens so groß, wie AE;

3) Durch E lege man parallel zur Grundfläche AC eine Ebene (I. §. 181.), welche die Parallellinien in den Punkten F, G und H schneidet, und dadurch das bestimmte Viereck EG wird.

Es ist auf diese Weise der durch die Vierecke AC und EG, und durch die Vierecke AF, BG, DG und AH begränzte Körper AG das verlangte Prisma.

Beweis:

1) Die geraden Linien BF, CG und DH, welche die untere Parallelebene AC schneiden oder berühren, schneiden auch die obere Parallelebene (I. §. 179. Zus. III.), und es bekömmt diese eben so viele Seiten, wie die Grundfläche, das ist, die obere Parallelebene wird auch ein Viereck (I. §. 13. a.).

2) Weil die Ebenen AC und EG parallel sind, und auf jeder Seite durch ein Viereck geschnitten werden, so sind die Durchschnittslinien parallel (I. §. 179. Zus. II.), das heißt EF # AB, FG # BC, HG # DC, und EH # AD, woraus folgt, daß EF = AB, FG = BC, HG = DC, und EH = AD (I. §. 41. Zus. IV.), wie auch, daß der Winkel HEF = DAB, EFG = ABC, FGH = BCD, und EHG = ADC (I. 176.);

3) Folglich sind die parallelen Figuren EG und AC kongruent (I. §. 54. Zus. I.), und alle Seitenflächen AF, BG ꝛc. sind Parallelogramme (I. §. 48. a.), weßhalb der Körper AG das verlangte Prisma ist (§. 6. a.).

I. Zusatz: Durch die Grundfläche und durch eine Seite nebst ihrer Lage gegen die Grundfläche ist das Prisma vollkommen bestimmt. Denn dadurch sind nach dem so eben angeführten Beweise die beiden Grundflächen, dann alle Seitenflächen und ihre Lage zu einander und zu den Grundflächen, mithin auch alle körperlichen Ecke bestimmt (§. 1. Zus. IV.), weßhalb das Prisma selbst vollkommen bestimmt ist (I. §. 6.).

II. Zusatz: Wenn nebst der Grundfläche auch eine Seitenfläche, und ihre Neigung zur Grundfläche gegeben ist, so ist das Prisma auch vollkommen bestimmt; weil durch die Größe und Lage der Seitenfläche die Größe und Lage einer jeden Seite in ihr bestimmt, mithin das Prisma selbst wieder gegeben ist (Zus. I.).

III. Zusatz: Zwei Prismen sind kongruent, wenn sie kongruente Grundflächen, dann gleiche Seiten, und diese zu den Grundflächen gleiche Neigungswinkel haben, gleichwie sie auch kongruent sind, wenn sie eine kongruente Grund- und Seitenfläche, und überdies diese Ebenen gleiche Neigungswinkel zu einander haben; weil dieselben unter diesen Bedingungen in beiden Fällen auf eine ganz gleiche Art bestimmt (Zus. I. und Zus. II.), mithin einander ähnlich und gleich, also kongruent sind (Arithm. I. §. 2. h.).

§. 12.

I. Lehrsatz:

Wenn ein Prisma mit einer Ebene parallel zur Grundfläche durchschnitten wird, so ist die Durchschnittsfigur mit der Grundfläche kongruent.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 12.) das Prisma AG gegeben, und es sei durch die Ebene JL parallel zur Grundfläche durchschnitten, so bilden die Durchschnittslinien JK, KL, LM rc. an den Seitenflächen oder an der Außenseite des Prisma den Perimeter der Durchschnittsfigur JL, welche nach dieser Voraussetzung mit der Grundfläche AC parallel ist;

2) Das Prisma hat so viele Seitenflächen, als die Grundfläche Seiten hat, und jede Seitenfläche wird durch die Parallelebene geschnitten (I. §. 179. Zus. IV.), deßwegen bekömmt der Perimeter der Durchschnittsfigur allemal so viele Seiten, als die Grundfläche hat;

3) Weil die Ebene JL parallel ist mit AC, und diese beiden Parallelebenen durch alle Seitenflächen des Prisma geschnitten werden, so ist JK ⧺ AB, KL ⧺ BC, ML ⧺ DC, und JM ⧺ AD (I. §. 179. Zus. II.) und deßhalb JK = AB, KL = BC, ML = DC, und JM = AD (I. §. 41. Zus. IV.), wie auch der Winkel MJK = DAB, JKL = ABC, KLM = BCD, und JML = ADC (I. §. 176.).

Es haben jetzt die beiden Parallelebenen JL und AC gleich viele Seiten, ferner sind alle Winkel und Seiten der Ordnung nach einander gleich, also sind dieselben kongruent, das heißt, die Durchschnittsfigur JL ist mit der Grundfläche kongruent.

Anmerkung: 1) Es ist offenbar, daß nach den angeführten Gründen jede Durchschnittsfigur mit der Grundfläche kongruent ist, man mag durch was immer für einen Punkt einer Seite die Parallelebene legen.

2) Weil nach dem vom Prisma aufgestellten Begriffe die obere Grundfläche mit der unteren parallel

und kongruent ist (§. 6. a.), so ist jede Durchschnittsfigur, welche mit der unteren Grundfläche parallel und kongruent ist, auch mit der oberen parallel und kongruent.

3) Wenn man beim Prisma nur sagt »die Grundfläche desselben«, so versteht man gewöhnlich unter diesem Ausdrucke die untere Grundfläche, auf welcher das Prisma steht.

§. 13.

II. Lehrsatz:

Wenn man im Prisma eine Seite in mehrere gleiche Theile theilet, und durch alle Theilungspunkte zur Grundfläche Parallelebenen legt, so wird das ganze Prisma in eben so viele kongruente Prismen getheilt.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 12.) das Prisma AG gegeben, und die Seite AE desselben in drei gleiche Theile getheilt, so daß AJ = JN = NE;

2) Nach der im Lehrsatze gesetzten Bedingung werden durch die Theilungspunkte N und J die Ebenen JL und NP parallel zur Grundfläche gelegt, deßhalb sind die Vierecke JL und NP mit der Grundfläche AC kongruent (§. 12.);

3) Die obere Grundfläche EG ist mit der unteren parallel und kongruent (§. 6. a.), folglich ist sie es auch mit den zur Grundfläche AC parallel gelegten Ebenen JL und NP, und die Linien AB, JK, NO und EF sind unter sich gleich und parallel (I. §. 179. Zus. II.), und die Vierecke AK, JO und NF sind Parallelogramme (I. §. 48. Zus. VIII.);

4) Aus den nämlichen Gründen sind alle übrigen Seitenflächen der Theile des Prisma, nämlich AM, JQ, NH ꝛc. Parallelogramme, und die Theile AL, JP und NG, in welche das ganze Prisma durch die Parallelebenen getheilt wird, sind ebenfalls Prismen (§. 6. a.).

5) Nach der Voraussetzung ist AJ = JN = NE,

also auch BK = KO = OF (I. §. 48. Zus. V.), ferner nach Nro. 3. ist AB = JK = NO = EF, und der Winkel JAB = NJK = ENO (I. §. 41.), indem die Seite EA diese Linien schneidet, gleichwie auch die Seitenfläche AF, in welcher die kleineren Seitenflächen AK, JO und NF liegen, die Parallelebenen AC, JL und NP so schneidet, daß dieselben allemal zu ihren Grundflächen gleiche Neigungswinkel haben (I. §. 182.).

Es haben also die Prismen AL, JP und NG eine kongruente Grund- und Seitenfläche, und gleiche Neigungswinkel dieser Ebenen, weßhalb dieselben kongruent sind (§. 11. Zus. III.), das heißt, wenn man eine Seite AE in mehrere gleiche Theile theilet, und durch alle Theilungspunkte zur Grundfläche Parallelebenen legt, so wird das ganze Prisma in eben so viele kongruente Prismen getheilt.

I. Zusatz: Die Linie AJ ist (Fig. 12.) eine Seite des Prisma AL, dann AN ist eine Seite des Prisma AP, und AE ist eine Seite des Prima AG, das ist, der Seite AJ entspricht das Prisma AL, der Seite AN entspricht das Prisma AP, und der Seite AE entspricht das Prisma AG; nun AJ = JN = NE, also AN = AJ + JN = AJ + AJ = 2AJ, und AE = AJ + JN + NE = AJ + AJ + AJ = 3AJ, und hätte man die Linie AE überhaupt in m gleiche Theile getheilt, so wäre aus den angeführten Gründen AE = m . AJ, im Falle m eine ganze Zahl bezeichnet.

Eben so ist das Prisma AP, oder Pr . AP = Pr . AL + Pr . JP, und das Prisma AG, oder Pr . AG = Pr . AL + Pr . JP + Pr . NG; nach dem aufgestellten Lehrsatze sind aber die Prismen AL, JP und NG kongruent, also ist Pr . AP = 2Pr . AL, und Pr . AG = 3Pr . AL, und hätte man die Seite AE in m gleiche Theile getheilt, so wäre Pr . AG = m . Pr . AL, gleichwie die Seite AE = m . AJ.

Es stehen also die Prismen mit ihren Seiten im geraden Verhältnisse, indem mit der Zunahme der

Seiten eben so die Zunahme der Prismen verbunden ist (Arithm. *II.* §. 58. a.).

II. **Zusatz:** Die Prismen sind mit ihren Seiten gerade proportionirt, oder, wie man sich auch ausdrückt, sie verhalten sich, wie ihre Seiten. Hat man (*Fig.* 12.) die Prismen *AL* und *AG*, so verhält sich das Prisma *AL* zum Prisma *AG*, wie die Seite *AJ* zur Seite *AE*, das heißt *Prism* . *AL* : *Prism* . *AG* = *AJ* : *AE*.

Anmerkung: Was in Betreff solcher Proportionen im I. Theile dieses Lehrbuches am Ende des §. 61. in der Anmerkung gesagt wurde, ist hier ebenfalls anzuwenden, damit man die Richtigkeit der vorstehenden Proportion einsieht.

§. 14.

III. Lehrsatz:

Die Prismen verhalten sich, wie ihre Höhen.

Beweis:

1) Es seien (*Fig.* 12.) die Prismen *AL* und *AG* gegeben, und man errichte von einem Punkte der oberen Grundfläche, etwa von *H* auf die untere Grundfläche *AC* das Perpendikel *HU*, so wird dieses auch die Parallelebene *JL* schneiden (*I.* §. 179. Zus. *III.*), wodurch der Theil *RU* die Höhe des anderen Prisma *AL* wird (§. 6. c.);

2) Legt man durch die drei Punkte *H*, *D* und *U* die Dreiecksebene *HDU*, so schneidet diese die Grundfläche *AC* in der Linie *DU* (*I.* §. 4. Zus.), mithin auch die Parallelebene *JL* in einer geraden Linie *MR* (*I.* §. 179. Zus. *IV.*) welche mit *DU* parallel ist (*I.* §. 179. Zus. *II.*);

3) Deßwegen verhält sich (*I.* §. 81.)

DM : *DH* = *RU* : *HU*,

ferner *DM* : *DH* = *Prism* . *AL* : *Prism* . *AG* (§. 13. Zus. *II.*),

also *Prism* . *AL* : *Prism* . *AG* = *RU* : *SU* (Arithm. *IV.* §. 43.).

Das ist, die Prismen verhalten sich wie ihre Höhen, oder die Prismen sind mit ihren Höhen gerade proportionirt.

§. 15.

IV. Lehrsatz:

Wenn zwei Prismen gleiche Höhen haben, so verhalten sie sich, wie ihre Grundflächen.

Beweis:

1) Es seien (*Fig.* 12 und 19.) die Prismen *AG* und af gegeben, und ihre Höhen *HU* und fh seien einander gleich;

2) Man nehme in der Höhe *HU* des ersten Prisma den beliebigen Punkt *R* an, und mache im zweiten Prisma die Linie gh = *RU*;

3) Nach dem im vorigen §. aufgestellten Lehrsatze sind die Prismen mit ihren Höhen gerade proportionirt, das ist:

$Pr.AG : Pr.AL = HU : RU$ (Fig. 12.),
und $Pr.af : Pr.ap = fh : gh$ (Fig. 19.)
also $Pr.AG : Pr.AL = Pr.af : Pr.ap$
(Arithm. *IV*. §. 43.).

4) Da nun diese Proportion allgemein gilt, die Höhen *RU* und gh mögen so klein angenommen werden, als man will, so muß dieselbe auch gelten, wenn diese verschwinden, und gleich Null (= 0) werden; alsdann verwandeln sich aber die Prismen *AL* und ap in ihre Grundflächen *ABCD* und abc, das ist, die Prismen verhalten sich bei gleichen Höhen zu einander, wie ihre Grundflächen, oder

$Pr.AG : Pr.af = \square ABCD : \triangle abc.$

Zusatz: Zwei Prismen von gleichen Höhen und Grundflächen sind gleich; das ist (Fig. 12 und 19.), wenn $HU = fh$, und $\square AC = \triangle abc$, so ist $Prism.AG = Prism.af$.

Denn nach dem Lehrsatze verhalten sich bei gleichen Höhen die Prismen wie ihre Grundflächen, das ist, $Pr.AG : Pr.af = \square AC : \triangle abc$; sind nun auch die Grundflächen gleich, also $\square AC = \triangle abc$, so ist auch $Pr.AG = Pr.af$ (Arithm. *IV*. §. 35. Zus. *II*.), das heißt, bei gleichen Höhen und Grundflächen sind die Prismen einander gleich.

Anmerkung. Die Prismen werden hier nur in dem Sinne gleich genannt, daß sie gleiche Quantität haben, somit einen gleich großen Raum einschließen. Auf die Beschaffenheit ihrer Begränzung oder auf ihre Qualität wird keine Rücksicht genommen, wenn man zeigt, daß das eine Prisma eben so viel Raum einnimmt, wie das andere, also beide Prismen eine gleiche Größe, oder eine gleiche Quantität haben (§. 5. Anmerk.)

§. 16.

V. Lehrsatz:

Wenn zwei Prismen gleiche Grundflächen haben, so verhalten sie sich, wie ihre Höhen.

Beweis:

1) Es seien (*Fig.* 12 und 19.) in den Prismen *AG* und af die Grundflächen *ABCD* und abc einander gleich, und man mache *RU* = gh, so daß die Prismen *AL* und ag gleiche Höhen haben, wenn man durch *R* und g die Parallelebenen *JL* und mnp legt;

2) Nach §. 14. verhalten sich die Prismen, wie ihre Höhen, also

$$Pr.\,AG : Pr.\,AL = HU : RU,$$

und $Pr.\,af : Pr.\,ap = fh : gh,$

mithin $Pr.\,AG : Pr.\,af = HU : fh;$

weil die Grundfläche *ABCD* = abc, und die Höhe *RU* = gh, also das Prisma *AL* dem Prisma ap gleich ist (§. 15. Zus.), und somit bei diesen beiden Proportionen die Hinterglieder gemeinschaftlich sind (Arithm. *IV*. §. 43. Nro. 2.).

§. 17.

VI. Lehrsatz:

Zwei Prismen sind im zusammengesetzten geraden Verhältnisse ihrer Grundflächen und ihrer Höhen.

Beweis:

1) Es sei (*Fig.* 12.) das größere Prisma *AG*, und (*Fig.* 19.) daß kleinere Prisma ap gegeben, man ma-

che in der Höhe SU das Perpendikel RU der Höhe gh gleich, und lege durch R mit der Grundfläche AC die Parallelebene JL;

2) Nach §. 14. verhält sich

$$Pr . AG : Pr . AL = HU : RU,$$

und, weil RU gleich gh ist,

$$Pr . AG : Pr . AL = HU : gh,$$

ferner $Pr . AL : Pr . ap = \square AC : \triangle abc,$

---

also $Pr . AG : Pr . ap = \square AC \times HU : \triangle abc \times gh;$

indem man beide Porportionen mit einander multiplizirt (Arithm. IV. §. 44.), und die beiden ersten Verhältnisse wegen des gemeinschaftlichen Gliedes $Pr . AL$ stättig sind (Arithm. §. 44. Zus. *II.*).

Es sind also zwei Prismen im zusammengesetzten geraden Verhältnisse ihrer Grundflächen und ihrer Höhen, das ist, zwei Prismen verhalten sich zu einander, wie die Produkte ihrer Grundflächen und Höhen.

I. Zusatz: Zwei senkrechte Prismen stehen im zusammengesetzten geraden Verhältnisse ihrer Grundflächen und Seiten; weil beim senkrechten Prisma die Seiten auf der Grundfläche senkrecht stehen (§. 6. Zus. IV.), und deßhalb jede Seite zugleich die Höhe des Prisma ist (§. 6. Zus. VI.).

II. Zusatz: Wenn daher das Verhältniß zweier Größen aus dem Verhältnisse zweier Flächen und zweier Linien zusammengesetzt ist, so verhalten sie sich überhaupt, wie zwei Prismen, welche diese Flächen zu Grundflächen, und diese Linien zu Höhen haben, oder sie verhalten sich auch, wie zwei senkrechte Prismen, welche die gegebenen geradlinigten Figuren zu Grundflächen, und die vorkommenden geraden Linien zu Seiten haben (Zus. I.).

III. Zusatz: Aehnliche Prismen verhalten sich wie die Kubikzahlen ähnlich liegender Seiten oder Höhen.

Denn wenn B und b die Grundflächen, dann A und a die Höhen, und L und l ähnliche Seiten bei ähnlichen Prismen bezeichnen, so verhält sich nach dem Lehrsatze, im Falle man die Prismen durch P und p ausdrückt,

$P : p = B \,.\, A : b \,.\, a,$
nun ist $B : b = L^2 : l^2$ (I. §. 164.),
und $A : a = L : l$ (§. 5. Zus. I.),
also $BA : ba = L^3 : l^3$ (Arithm. IV. §. 44.),
mithin auch $P : p = L^3 : l^3$ (Arithm. IV. §. 43.),
ferner ist $A^3 : a^3 = L^3 : l^3$ (Arithm. IV. §. 42.),
folglich auch $P : p = A^3 : a^3$.

IV. Zusatz: Bei gleichen Prismen sind die Grundflächen mit den Höhen umgekehrt proportionirt.

Es seien (*Fig.* 12 und 19.) die Prismen *AG* und af gegeben, dann die Figuren *ABCD* und abc seien ihre Grundflächen, und die Perpendikel *HU* und fh ihre Höhen.

Nach dem Lehrsatze verhält sich

$Pr \,.\, AG : Pr : af = \square\, AC \times HU : \triangle\, abc \times fh.$

Sind nun die Prismen gleich, also $Pr \,.\, AG = Pr \,.\, af$, so ist auch das Produkt $\square\, AC \times HU$ dem Produkte $\triangle\, abc \times fh$ gleich (Arithm. IV. §. 35. Zus. II.), und ist dieses, so verhält sich (Arithm. IV. §. 35. Zus. VI.)

$\square\, AC : \triangle\, abc = fh : HU.$

Das heißt, wenn die Prismen gleich sind, so verhalten sich ihre Grundflächen umgekehrt wie ihre Höhen (Arithm. II. §. 60.).

V. Zusatz: Wenn bei zwei Prismen die Grundflächen mit den Höhen umgekehrt proportionirt sind, so sind die Prismen gleich. Denn wenn $B : b = a : A$, so ist $BA = ba$ (Arithm. IV. §. 35. Zus. IV.), also $P = p$ (Arithm. IV. §. 35. Zus. II.), indem $P : p = B \,.\, A : b \,.\, a$ (Lehrs.).

Anmerkung: Was im I. Theile dieses Lehrbuches im §. 79. Zus. II., und in der diesem §. beigefügten ersten Anmerkung gesagt wurde, gilt auch von den Flächen und Körpern; diese stehen nämlich nur mit einander im Verhältnisse, und bilden nur in so ferne Produkte, Quotienten rc., in so ferne man diese ausgedehnten stätigen Größen als gezählte Größen betrachtet, und somit ihre Größe durch ein gemeinschaftliches Maaß in Zahlen ausgedrückt wird.

§. 18.

Das Parallelepipedum und der Würfel.

a) Wenn im Prisma auch die Grundflächen Parallelogramme sind (I. §. 48. a.), und somit dessen Oberfläche aus lauter Parallelogrammen besteht, so heißt dasselbe ein Parallelepipedum.

b) Sind alle Parallelogramme Rechtecke (I. §. 50. b.), so nennt man das Parallelepipedum rechtwinklicht oder senkrecht; ist dieses der Fall nicht, so ist es schiefwinklicht.

c) Besteht die Oberfläche des rechtwinklichten Parallelepipedums aus lauter kongruenten Quadraten (I. §. 50. a.), so nennt man es einen Kubus oder Würfel (§. 3. e.).

I. Zusatz: Das rechtwinklichte Parallelepipedum ist ein senkrechtes Prisma (§. 6. d.), bei welchem sowohl alle Seitenflächen auf einander, als auch auf die Grundflächen senkrecht stehen, indem die Grundflächen und die Seitenflächen Rechtecke sind, und also da alle Neigungswinkel rechte Winkel sind (I. §. 176. Zus. IV.).

II. Zusatz: Im Würfel oder Kubus sind alle Seiten der Grundflächen und Seitenflächen einander gleich; weil die Oberfläche desselben aus lauter kongruenten Quadraten besteht, und zu gleichen Quadraten gleiche Seiten gehören (I. §. 51. Zus. I.).

III. Zusatz: Durch eine Seite ist der Würfel vollkommen bestimmt. Denn durch die gegebene Seite sind alle Grundflächen und Seitenflächen als Quadrate bestimmt (I. §. 50. Zus. III.), und der Neigungswinkel derselben zur Grundfläche ist als ein rechter Winkel auch gegeben, weßhalb der Würfel selbst durch eine Seite vollkommen bestimmt ist (§. 11. Zus. I.).

IV. Zusatz: Zwei Würfel, die eine Seite gleich haben, sind kongruent; da durch eine Seite beide Würfel ganz auf die nämliche Weise bestimmt sind (I. §. 6. Zus.).

V. Zusatz: Zwei Würfel sind im triplizirten Verhältnisse ihrer Seiten. Denn zwei Würfel stehen als

Prismen im zusammengesetzten geraden Verhältnisse ihrer Grundflächen und Höhen (§. 17.); die Grundflächen sind aber reguläre Vierecke (I. §. 50. Zus. II.), die sich verhalten, wie die Quadrate ihrer Seiten (I. §. 90. Zus. IV. und §. 164.), und die Seiten dieser Quadrate sind zugleich die Höhen der Würfel (Zus. II.), weßhalb diese mit ihren Seiten im triplizirten Verhältnisse stehen (Arithm. IV. §. 44. Zus. V.).

Bezeichnen die Buchstaben C und c die beiden Würfel, und A und a ihre Seiten, so ist die Grundfläche des ersten Würfels $= A^2$, und die des zweiten $= a^2$, während die Seiten A und a zugleich ihre Höhen sind (§. 6. Zus. VI.); daher verhält sich (§. 17.)

$$C : c = A^2 \times A : a^2 \times a,$$

also $C : c = A^3 : a^3$.

VI. Zusatz: Wenn daher zwei Größen im triplizirten Verhältnisse zweier Linien stehen, so verhalten sie sich zu einander, wie zwei aus diesen Linien als Seiten beschriebene Würfel.

Anmerkung: 1) Es ist offenbar, daß der hier bezeichnete Würfel oder Kubus nichts anders ist, als der reguläre Körper, der zur Oberfläche sechs Vierecke hat, und das Hexaeder genannt wird (§. 3. e.).

2) Ueber eine gegebene Linie läßt sich ein Würfel beschreiben, wenn man aus dieser Linie als Seite ein Quadrat verzeichnet (I. §. 51. Anmerk. 1.), dann diese nämliche Linie als Seite des Würfels an einem Ecke des Quadrates, das man zur Grundfläche annimmt, senkrecht errichtet (I. §. 174.), und hierauf nach Vorschrift des §. 11. ein Prisma verzeichnet.

3) Einige Mathematiker (Fig. 5.) bezeichnen z. B. den über die Linie ad beschriebenen Würfel af dadurch, daß sie rechts oben c als Exponent setzen, und also ad^c schreiben, um den über die Seite ad gezeichneten Würfel auszudrücken; ich werde hingegen den Würfel öfters durch den beigefügten Exponenten 3 anzeigen, da man aus dem Zusammenhange schon erkennt, ob z. B. der Ausdruck ad^3 bloß eine Kubikzahl, oder einen über die Linie ad beschriebenen Würfel bezeichnen soll (I. §. 50. Zus. III.).

§. 19.

VII. Lehrsatz:

Durch die Grundfläche und durch die Größe und Lage der Axe ist der Zylinder vollkommen bestimmt.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 13.) die Grundfläche AB, und die Axe CE nebst ihrem Neigungswinkel zur Grundfläche gegeben;

2) Durch die Größe und Lage der Axe ist die Lage des Punktes E als des Endspunktes der Axe CE, und dadurch die Lage der zweiten Grundfläche DF gegeben;

3) Weil die zweite Grundfläche DF mit der ersten gegebenen Grundfläche AB parallel und kongruent sein muß (§. 7. a.), so ist auch die Größe und Lage der krummen Seitenfläche, folglich der ganze Zylinder vollkommen bestimmt.

I. Zusatz: Zwei Zylinder sind kongruent, wenn sie gleiche Grundflächen und gleiche Axen haben, und diese letzteren mit den Grundflächen gleiche Neigungswinkel bilden; weil durch eine gleiche Grundfläche und gleiche Axe, und durch die nämliche Neigung der Axe zur Grundfläche nach dem aufgestellten Lehrsatze der eine Zylinder eben so bestimmt ist, wie der andere, somit in dieser Voraussetzung beide Zylinder vollkommen einerlei sind (I. §. 6. Zus.).

II. Zusatz: Der senkrechte Zylinder entsteht, wenn sich ein Rechteck (I. §. 50. b.) um eine Seite ganz herumdreht. Ist (Fig. 13.) das Rechteck ADEC gegeben, und es dreht sich ganz um die Seite EC herum, so beschreibt die Seite ED die obere Grundfläche, die Seite CA die untere Grundfläche, und die Seite DA die krumme Seitenfläche des senkrechten Zylinders AF, während die Seite EC die Axe desselben wird.

Anmerkung. Aus (Fig. 13.) der gegebenen Grundfläche AB und der gegebenen Axe CE nebst ihrer Neigung zur Grundfläche läßt sich die obere Grundfläche geometrisch

trisch beschrieben, indem man durch E mit der Grundfläche AB eine Parallelebene legt, und in dieser vom Punkte E aus mit dem Halbmesser ED, welcher dem Radius CA gleich gemacht wird, den Kreis DF beschreibt; die krumme Seitenfläche muß man sich aber in Ermangelung einer bestimmten Vorschrift unmittelbar vorstellen, um den Zylinder aus den gegebenen Stücken zu erhalten.

§. 20.

VIII. Lehrsatz:

Der Zylinder läßt sich als ein unendlicheckigtes Prisma betrachten.

Beweis:

1) Die beiden Grundflächen des Zylinders (Fig. 13.) sind parallele gleiche Kreise (§. 7. a.), die man als parallele kongruente Vielecke von unendlich vielen Seiten betrachten kann (I. §. 130. Zus. II.);

2) Alle Seiten des Zylinders sind mit der Axe, also auch unter sich parallel und gleich (§. 7. Zus. III.), mithin besteht die krumme Seitenfläche aus unendlich vielen Parallelogrammen (I. §. 48. Zus. VIII.), und der Zylinder läßt sich als ein unendlicheckigtes Prisma betrachten (§. 6. a.).

I. Zusatz: Was nun vom Prisma überhaupt erwiesen wurde, gilt auch vom Zylinder. Wenn daher der Zylinder mit einer Ebene parallel zur Grundfläche geschnitten wird, so ist die Durchschnittsfigur mit der Grundfläche kongruent (§. 12.), folglich ein mit der Grundfläche gleicher Kreis.

II. Zusatz: Zylinder von gleichen Höhen und von gleichen Grundflächen sind einander gleich (§. 15 Zus.)

III. Zusatz: Zylinder von gleichen Höhen verhalten sich, wie ihre Grundflächen (§. 15.), dann Zylinder von gleichen Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen (§. 16.), und überhaupt sind die Zylinder im zusammengesetzten geraden Verhältnisse ihrer Grundflächen und Höhen (§. 17.).

IV. Zusatz: Haben zwei Zylinder eine gleiche Höhe, so verhalten sie sich wie die Quadrate der Durch-

messer oder der Halbmesser ihrer Grundflächen, weil sie sich in diesem Falle wie ihre Grundflächen (Zus. III.), und diese sich als Kreise wie die Quadrate ihrer Diameter oder ihrer Halbmesser verhalten (I. §. 165.).

Bezeichnen die Buchstaben C und c zwei Zylinder von gleicher Höhe, und die Buchstaben D und d die Durchmesser, und R und r die Halbmesser ihrer Grundflächen, so verhält sich

$$C : c = D^2 : d^2,$$

und $C : c = R^2 : r^2$.

V. Zusatz: Wenn zwei Zylinder ähnlich, und somit die Höhen mit den Durchmessern ihrer Grundflächen proportionirt sind, so verhalten sich die Zylinder zu einander, wie die Kubikzahlen der Diameter oder der Radien ihrer Grundflächen.

Haben die Buchstaben C, c, D, d ꝛc. die im vorigen Zusatze angegebenen Bedeutungen, und drücken die Buchstaben B und b die Grundflächen, und A und a die Höhen der Zylinder aus, so verhält sich nach dem III. Zusatze

$$C : c = BA : ba;$$

Nun ist $B : b = D^2 : d^2$ (I. §. 165.),
und $A : a = D : d$ (§. 5. Zus. I.),
folglich $BA : ba = D^3 : d^3$ (Arithm. IV. §. 44.),
also $C : c = D^3 : d^3$ (Arithm. IV. §. 43.).

Da überdieß der Durchmesser zweien Radien gleich ist (I. §. 14. Zus. IV.),
also $D = 2R$, und $d = 2r$,
mithin $D^3 = 8R^3$, und $d^3 = 8r^3$ (Arithm. III. §. 70. I.),
so verhält sich auch

$$D^3 : d^3 = 8R^3 : 8r^3 = R^3 : r^3,$$

ferner $C : c = D^3 : d^3$,
somit auch $C : c = R^3 : r^3$.

VI. Zusatz: Wenn in zwei Zylindern allemal die Höhe dem Durchmesser der Grundfläche gleich ist, so verhalten sie sich zu einander wie die Würfel oder Kubikzahlen der Durchmesser.

Denn wenn $A = D$, und $a = d$, so verhält sich $A : a = D : d$, mithin nach dem vorigen Zusatze $C : c = D^3 : d^3$, oder auch $C : c = R^3 : r^3$.

VII. Zusatz: Bei gleichen Zylindern sind die Höhen mit den Grundflächen umgekehrt proportionirt, das ist, wenn C = c, so verhält sich A : a = b : B (§. 17. Zus. IV.).

VIII. Zusatz: Wenn bei zwei Zylindern die Höhen mit den Grundflächen umgekehrt proportionirt sind, so sind dieselben einander gleich (§. 17. Zus. V.).

II. Abschnitt.

Von der Pyramide und dem Kegel.

§. 21.

Aufgabe, aus der gegebenen Grundfläche und einem bestimmten Punkte außer ihr eine Pyramide zu beschreiben.

Auflösung:

1) Es sei (Fig. 15.) das Viereck BD als Grundfläche, und der Punkt A als Spitze der Pyramide gegeben;

2) Aus der Spitze A ziehe man zu allen Ecken der Grundfläche gerade Linien, und man hat die verlangte Pyramide (§. 8. a.).

Denn auf diese Weise erhält man als Seitenflächen so viele Dreiecke, als die Grundfläche Seiten hat, und alle diese Dreiecke stoßen außer der Grundfläche im gegebenen Punkte A zusammen, schließen also mit derselben eine Pyramide ein.

I. Zusatz: Aus einer gegebenen Grundfläche, und einem gegebenen Punkte außer ihr als Spitze ist allemal eine Pyramide möglich, da man in Gemäßheit der vorstehenden Auflösung nach allen Ecken der Grundfläche nur gerade Linien ziehen darf (I. §. 3. Zus. I.), um eine Pyramide zu erhalten.

II. Zusatz: Jeder ganz eckigte Körper (§ 2. b.), in welchem kein Flächenwinkel erhaben ist, läßt sich aus einem Punkte, den man innerhalb desselben an-

nimmt, in so viele Pyramiden theilen, als die Zahl der ebenen Figuren beträgt, die seine ganze Oberfläche bilden, indem man aus dem angenommenen Punkte nach allen Ecken der Figuren gerade Linien ziehen kann, und man dadurch so viele Pyramiden erhält, als Figuren an der Außenseite des Körpers vorkommen (Zus. I.).

III. Zusatz: Soll man aus der Grundfläche und einer Seitenfläche nebst ihrem Neigungswinkel eine Pyramide beschreiben, so zieht man aus der Spitze nach allen übrigen Ecken der Grundfläche gerade Linien, indem durch die gegebenen Stücke die Grundfläche und die Lage der Spitze gegeben ist (Zus. I.).

IV. Zusatz: Durch die Grundfläche und die Lage der Spitze, wie auch durch die Grundfläche und eine Seitenfläche nebst ihrem Neigungswinkel ist die Pyramide vollkommen bestimmt, da auch im letzteren Falle die Grundfläche und die Spitze gegeben ist, und dadurch alle geraden Linien von der Spitze zu den Ecken der Grundfläche (I. §. 3. Zus. II.), folglich alle Seitenflächen gegeben sind (I. §. 24. Zus.), und also die ganze Pyramide selbst vollkommen bestimmt ist (I. §. 6.).

V. Zusatz: Zwei Pyramiden sind kongruent, wenn sie eine kongruente Grundfläche und Seitenfläche, und zugleich diese Flächen in beiden den nämlichen Neigungswinkel haben, weil dann beide Pyramiden ganz auf die nämliche Weise bestimmt (Zus. IV.), mithin kongruent sind (I. §. 6. Zus.).

§. 22.

I. Lehrsatz:

Wenn man die Pyramide mit einer Ebene parallel zur Grundfläche schneidet, so ist

A) die Durchschnittsfigur mit der Grundfläche ähnlich, und

B) diese beiden Figuren verhalten sich zu einander, wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze.

Beweis von A:

1) Es sei (Fig. 15.) die Pyramide BCDEA durch die Ebene GM parallel zur Grundfläche BCDE geschnitten, also das Viereck GM die Durchschnittsfigur;

2) Diese Figur wird von jeder Seitenfläche geschnitten (I. §. 179. Zus. IV.), mithin bekömmt sie mit der Grundfläche BCDE eine gleiche Anzahl Seiten; und

3) die Seiten der Durchschnittsfigur sind der Ordnung nach mit den Seiten der Grundfläche parallel (I. §. 179. Zus. II.), das heißt, BC # GF, CD # FM, ED # HM, und BE # GH, also sind die Winkel der Durchschnittsfigur, nämlich F, M, H und G der Ordnung nach den Winkeln der Grundfläche C, D, E und B gleich (I. §. 176.);

4) Weil nach Nro. 3. die Seiten der oberen Figur der Ordnung nach mit den der unteren parallel sind, so verhält sich (I. §. 82.)

AF : AC = FG : CB,
und AF : AC = FM : CD,
also FG : CB = FM : CD, (Arithm. IV. §. 43.);

5) Aus den nämlichen Gründen sind in beiden Figuren alle Seiten, welche gleiche Winkel einschließen, zu einander proportionirt, wie es die Seiten sind, welche die gleichen Winkel F und C einschließen, nämlich

FM : CD = MH : DE,
dann MH : DE = GH : BE,
und GH : BE = FG : CB.

Es haben also beide Figuren gleich viele Seiten, ihre Winkel sind der Ordnung nach einander gleich, und die homologen Seiten sind zu einander proportionirt, weßhalb die Durchschnittsfigur mit der Grundfläche ähnlich ist (I. §. 90. Zus. I.).

Beweis von B:

1) Nach dem so eben angeführten Beweise ist die Durchschnittsfigur mit der Grundfläche ähnlich, daher verhält sich (I. §. 164.)

□ GM : □ BD = $FG^2 : CB^2$,
und FG : CB = AG : AB (I. §. 82.),

also $FG^2 : CB^2 = AG^2 : AB^2$ (Arithm. IV. §. 42.) mithin auch $\square\, GM : \square\, BD = AG^2 : AB^2$;

2) Man fälle von der Spitze A auf die Grundfläche BD das Perpendikel AK (I. §. 173.), so mißt dieses die Entfernung der Spitze von der Grundfläche (I. §. 173. Zus. II.), und schneidet die Parallelebene GM in einem Punkte N (I. §. 179. Zus. III.), so daß AN die Entfernung der Durchschnittsfigur von der Spitze bestimmt;

3) Legt man endlich durch die drei Punkte A, K und B die Ebene AKB, so schneidet diese die Grundfläche in der geraden Linie BK (I. §. 4. Zus.), also auch die Parallelebene in einer geraden Linie GN (I. §. 179. Zus. IV.), welche mit BK parallel ist (I. §. 179. Zus. II.), und es verhält sich (I. §. 81.)

$AG : AB = AN : AK$,

mithin $AG^2 : AB^2 = AN^2 : AK^2$,

nach Nro. 1. ist $\square\, GM : \square\, BD = AG^2 : AB^2$,

folglich $\square\, GM : \square\, BD = AN^2 : AK$ (Arithm. IV. §. 43.).

Das heißt, die beiden parallelen Figuren, nämlich die Durchschnittsfigur und die Grundfläche, verhalten sich zu einander wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze der Pyramide.

I. Zusatz: Wenn man die Pyramide mit einer Ebene parallel zur Grundfläche schneidet, so ist das abgeschnittene obere Stück eine Pyramide, welche mit der ganzen ähnlich ist.

Denn wenn man (Fig. 15.) die Pyramide BCDEA mit der Ebene GM parallel zur Grundfläche BD schneidet, so ist das obere Stück GFMHA durch die ebene geradlinigte Figur GFMH als Grundfläche und durch vier Dreiecke als Seitenflächen begränzt, die sich oben in der Spitze A enden; dasselbe ist also auch eine Pyramide, und beide Pyramiden sind ähnlich, weil die Ebene GM mit der Grundfläche BD parallel gelegt ist, und wegen der Aehnlichkeit der Grundflächen und aller Seitenflächen der Ordnung nach alle körperlichen Ecke kongruent sind (§. 5.).

II. Zusatz: Die abgekürzte Pyramide (§. 8. e.)

kömmt einem Prisma von der nämlichen Grundfläche und Höhe um so näher, je kleiner ihre Höhe ist.

Denn bei der abgekürzten Pyramide (Fig. 15.) verhält sich nach vorstehendem Lehrsatze die obere Grundfläche oder □ GM : □ BD = $AN^2 : AK^2$.

Je kleiner nun die Höhe NK ist, desto größer wird AN, und kömmt der ganzen Höhe AK um so näher, und um so mehr nähert sich das Verhältniß $AN^2 : AK^2$ (Arithm. III. §. 70.), mithin auch das Verhältniß □ GM : □ BD dem Verhältnisse der Gleichheit (Arithm. II. §. 50. b.), und die beiden ähnlichen parallelen Grundflächen sind immer weniger an Größe von einander unterschieden, während die Seitenflächen, welche Trapezen sind, sich immer mehr Parallelogrammen nähern.

Es kömmt also die abgekürzte Pyramide einem Prisma von der nämlichen Grundfläche und Höhe um so näher, je kleiner die gemeinschaftliche Höhe ist.

III. Zusatz: Die abgekürzte Pyramide, deren Höhe unendlich klein ist, verwandelt sich in ein Prisma von der nämlichen Höhe und Grundfläche.

Denn wenn (Fig. 15.) die Höhe NK unendlich klein, also gleichsam nur ein Punkt oder Null ist, so ist AN = AK, also $AN^2 = AK^2$ (Arithm. III. §. 70. I.), und es ist in der Proportion □ GM : □ BD = $AN^2 : AK^2$ auch □ GM = □ BD (Arithm. IV. §. 35. Zus. II.), dann die Durchschnittsfigur GM ist mit der Grundfläche BD ähnlich und gleich also kongruent (Arithm. I. §. 2. h.), und die Seitenflächen verwandeln sich in Parallelogramme (I. §. 48. Zus. VIII.), mithin verwandelt sich die abgekürzte Pyramide in ein Prisma, welches das Viereck BD zur Grundfläche, und die Linie NK zur Höhe hat.

IV. Zusatz: Pyramiden von gleichen Grundflächen und gleichen Höhen sind einander gleich.

Denn stellt man sich jede von den beiden gleichen Höhen in unendlich viele gleiche Theile getheilt, und durch alle Theilungspunkte mit den Grundflächen Parallelebenen vor, so bestehen beide Pyramiden aus gleich vielen abgekürzten Pyramiden von gleichen, aber un-

endlich kleinen Höhen (§. 8. e.); da nun diese insgesammt wie Prismen zu betrachten sind (Zus. III.), so ist in beiden Pyramiden die erste abgekürzte Pyramide der ersten, die zweite der zweiten, die dritte der dritten, und so fortgesetzt, gleich (§. 15. Zus.), also sind beide Pyramiden selbst einander gleich (Arithm. I. §. 10. Nro. 9.), das heißt, bei gleichen Grundflächen und gleichen Höhen haben die Pyramiden eine gleiche Quantität, nehmen also bei einem gleich großen Kubikinhalte den nämlichen Raum ein.

§. 23.

II. Lehrsatz:

Mehrere Pyramiden von einer gleichen Höhe sind zusammen einer einzigen Pyramide gleich, welche die nämliche Höhe und eine Grundfläche hat, die den Grundflächen aller übrigen Pyramiden zusammen genommen gleich ist.

Beweis:

1) Man drücke die gegebenen Pyramiden, wenn es drei sind, durch C, D und E, ihre gemeinschaftliche Höhe durch A, die Grundfläche der großen Pyramide, die man mit P bezeichnen kann, durch B, und die Grundflächen der einzelnen Pyramiden durch f, g und h aus.

2) Man zerlege die Grundfläche B in ihre drei Theile f, g und h (I. §. 162.), weil nach der Bedingung des Lehrsatzes die Grundfläche der großen Pyramide allen übrigen Grundflächen zusammen gleich ist, also $B = f + g + h$;

3) Aus der Spitze der großen Pyramide P ziehe man an alle Ecke dieser Theile gerade Linien, so wird dieselbe in eben so viele Pyramiden getheilt, als die Grundfläche B Theile hat, mithin in diesem Falle in drei Pyramiden (§. 21. Zus. I.); drückt man nun diese durch m, n und p aus, so ist die große Pyramide oder $P = m + n + p$ (Arithm. I. §. 10. Nro. 2.);

4) Weil die Pyramiden m, n und p eine gemeinschaftliche Spitze, also die nämliche Höhe A haben (I. §. 173. Zus. 1.), so ist wegen der gleichen Grundfläche und gleichen Höhe die erste Pyramide m gleich der Pyramide C, dann die zweite Pyramide n ist gleich der Pyramide D, und die Pyramide p ist gleich der Pyramide E, oder

$$m = C,$$
dann $n = D,$
und $p = E,$

also $m + n + p = C + D + E$ (Arithm. I. §. 25. I.);

5) Nach Nro. 3. geben aber die drei Pyramiden m, n und p zusammen die ganze Pyramide P, also ist $P = C + D + E$ (Arithm. I. §. 10. Nro. 4.), das ist, die Pyramiden C, D und E von gleicher Höhe sind einer einzigen Pyramide P gleich, welche die nämliche Höhe und eine Grundfläche hat, die den Grundflächen jener drei Pyramiden zusammen gleich ist.

§. 24.

III. Lehrsatz:

Eine dreieckichte Pyramide ist der dritte Theil eines dreieckigten Prisma von der nämlichen Grundfläche und Höhe.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 20.) die dreieckigte Pyramide ABCE, und das dreieckigte Prisma AE gegeben, welches mit der Pyramide die nämliche Grundfläche ABC, und eine gleiche Höhe hat;

2) Man lege durch die Punkte A, E und F, und durch A, E und C die Ebenen AEF und AEC, und theile dadurch das ganze Prisma in die drei Pyramiden DEFA, dann ABCE und EFCA;

3) Die Pyramiden DEFA und ABCE sind einander gleich, weil die Figuren DEF und ABC gleich und parallel sind (§. 6. a.), also dieselben gleiche Grundflächen, und eine gleiche Höhe haben (§. 15. Zus.),

und die Parallelebenen in allen Punkten gleich weit von einander abstehen (l. §. 179. Zus. V.);

4) Bei der Pyramide ABCE nehme man das Dreieck EBC, und bei der Pyramide EFCA nehme man das Dreieck EFC als Grundfläche, und den Punkt A als gemeinschaftliche Spitze an; es haben jetzt diese beiden Pyramiden, da die zwei Dreiecke in einer Ebene liegen, eine gemeinschaftliche Höhe (l. 173. Zus. l.), und gleiche Grundflächen, indem △ EBC = △ EFC (l. §. 48. Zus. VI.), weßhalb die beiden Pyramiden ebenfalls einander gleich sind, und also auch die Pyramide DEFA der Pyramide EFCA gleich ist (Arithm. I. §. 10. Nro. 4.);

5) Diese drei Pyramiden machen zusammen als Theile das ganze Prisma AF aus, also ist jede, weil sie einander gleich sind, der dritte Theil des Prisma AF.

Drückt man die drei Pyramiden durch a, b und c, und das Prisma durch p aus, so ist $a + b + c = p$ (Arithm. I. §. 10. Nro. 2.), ferner ist $a = b = c$, mithin $a + a + a = p$, oder $3a = p$, also $a = \frac{1}{3}p$ (Arithm. III. §. 97.), das heißt, die dreieckigte Pyramide ist der dritte Theil eines dreieckigten Prisma, mit dem sie eine gleiche Grundfläche und eine gleiche Höhe hat.

I. Zusatz: Die Pyramide ist überhaupt der dritte Theil eines Prisma, das mit ihr eine gleiche Grundfläche und eine gleiche Höhe hat.

Ist die Pyramide A überhaupt vieleckigt, und eben so das Prisma B, so denke man sich eine dreieckigte Pyramide C, und ein dreieckigtes Prisma D, so daß diese beiden Körper mit der Pyramide A und dem Prisma B gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben. Nach dem Lehrsatze ist $C = \frac{1}{3}D$, also auch $A = \frac{1}{3}B$ (Arithm. I. §. 10. Nro. 10.), indem $C = A$ (§. 22. Zus. IV.) und $D = B$ (§. 15. Zus.)

II. Zusatz: Weil man den Zylinder als ein unendlicheckigtes Prisma betrachten kann (§. 20.), so ist auch jede Pyramide der dritte Theil eines Zylinders von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe.

III. Zusatz: Zwei Pyramiden verhalten sich, wie

zwei Prismen oder zwei Zylinder, mit denen sie gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben.

Drückt man die Pyramiden durch P und p, und die Prismen oder Zylinder durch C und c aus, so ist $P = \frac{1}{3}C$, und $p = \frac{1}{3}c$ (Zus. I. und II.), also $P : \frac{1}{3}C = p : \frac{1}{3}c$ (Arithm. II. §. 50. b.), und $P : p = \frac{1}{3}C : \frac{1}{3}c$, mithin $P : p = C : c$ (Arithm. IV. §. 38. und 41.).

IV. Zusatz: Es gelten also von den Pyramiden die von den Prismen und den Zylindern angegebenen Verhältnisse; das ist:

a) Pyramiden von gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundflächen (§. 15.); dann

b) Pyramiden von gleichen Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen (§. 16.); ferner

c) die Pyramiden stehen im zusammengesetzten Verhältnisse ihrer Grundflächen und Höhen (§. 17.); und

d) Aehnliche Pyramiden verhalten sich wie die Kubikzahlen ähnlich liegender Seiten oder Höhen (§. 17. Zus. III.).

V. Zusatz: Bei gleichen Pyramiden sind die Grundflächen mit ihren Höhen umgekehrt proportionirt.

Bezeichnet man die Pyramiden mit P und p, dann ihre Grundflächen mit B und b, und ihre Höhen durch A und a, so verhält sich nach dem vorigen Zusatze c.

$$P : p = B \,.\, A : b \,.\, a;$$

Ist nun $P = p$, so ist auch $B \,.\, A = b \,.\, a$ (Arithm. §. 35. Zus. II.), und $B : b = a : A$ (Arithm. §. 35. Zus. VI.), wo dem ersten Gliede das vierte, und dem zweiten das dritte entspricht (Arithm. II. §. 60.).

§. 25.

IV. Lehrsatz:

Durch die Grundfläche und durch die Axe nebst ihrer Neigung gegen die Grundfläche ist der Kegel vollkommen bestimmt.

Beweis:

Ist (Fig. 16.) die Grundfläche BE, dann die Axe

CA und ihr Neigungswinkel zur Grundfläche gegeben, so ist die Lage der Spitze A, und dadurch für jeden Punkt der Peripherie der Grundfläche jede Seite gegeben (I. §. 3. Zus. III.), mithin ist die ganze krumme Seitenfläche, also der ganze Kegel (§. 9. a.) vollkommen bestimmt (I. §. 6.).

I. Zusatz: Zwei Kegel sind kongruent, wenn sie gleiche Grundflächen und gleiche Axen haben, und die Neigungswinkel der Axen zu den Grundflächen gleich sind, indem dann der eine Kegel ganz so bestimmt ist, wie der andere (I. §. 6. Zus.).

II. Zusatz: Der senkrechte oder gleichseitige Kegel entsteht, wenn sich ein rechtwinklichtes Dreieck um einen Katheten drehet. Ist (Fig. 16.) das rechtwinklichte Dreieck BAC gegeben, und dreht es sich ganz um den Katheten AC, so beschreibt der andere Kathet CB die Grundfläche, und die Hypotenuse AB die krumme Seitenfläche des Kegels BAE, während A die Spitze und CA die Axe desselben wird.

Anmerkung. Ist für einen Kegel die Grundfläche, dann die Axe und die Neigung dieser zu jener gegeben, so bildet man sich mittels einer unmittelbaren Vorstellung die Seitenfläche, um einen Kegel zu erhalten, indem sich für dieselbe keine bestimmte Vorschrift geben läßt.

§. 26.

V. Lehrsatz:

Der Kegel läßt sich als eine unendlicheckigte Pyramide betrachten.

Beweis:

1) Die Grundfläche des Kegels ist ein Kreis (§. 9. a.), den man als ein reguläres Vieleck von unendlich vielen Seiten betrachten kann (I. §. 130. Zus. II.);

2) Deßhalb kann man sich vorstellen, die Seitenfläche des Kegels bestehe aus unendlich vielen Dreiecken, die mit dem Kegel die nämliche Spitze haben, und derer Grundlinien zusammen die Peripherie der Grundfläche des Kegels ausmachen.

Folglich läßt sich der Kegel als eine unendlicheckigte Pyramide betrachten (§. 8. a.).

I. Zusatz: Wenn man daher den Kegel parallel zur Grundfläche mit einer Ebene schneidet, so ist die Durchschnittsfigur mit der Grundfläche ähnlich (§. 22. A.), und deßhalb ebenfalls ein Kreis (I. §. 130. Zus. III.); und dieser Kreis oder die mit der Grundfläche parallele Durchschnittsfigur und die Grundflächen verhalten sich zu einander, wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze des Kegels (§. 22. B.).

II. Zusatz: Die Axe des Kegels geht durch den Mittelpunkt eines jeden zur Grundfläche parallelen Kegelkreises oder Querschnittes (§. 9. Zus. IV.).

III. Zusatz: Wenn man den Kegel parallel zur Grundfläche schneidet, so ist das abgeschnittene obere Stück ein Kegel, welcher mit dem ganzen ähnlich ist (§. 22. Zus. I.).

IV. Zusatz: Der abgekürzte Kegel (§. 9. e.) läßt sich als eine abgekürzte Pyramide betrachten, und kömmt einem Zylinder von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe um so näher, je kleiner die Höhe ist (§. 22. Zus. II.).

V. Zusatz: Ist die Höhe des abgekürzten Kegels so klein, daß man sie als Null betrachten kann, so verwandelt sich derselbe in einen Zylinder, der mit ihr eine gleiche Grundfläche und die nämliche Höhe hat (§. 22. Zus. III.).

VI. Zusatz: Zwei Kegel, oder auch ein Kegel und eine Pyramide von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe sind einander gleich (§. 22. Zus. IV.).

VII. Zusatz: Mehrere Kegel von gleicher Höhe sind zusammen einem einzigen Kegel von der nämlichen Höhe gleich, dessen Grundfläche aber die Summe aller Grundflächen jener Kegel ist (§. 23.).

VIII. Zusatz: Der Kegel ist der dritte Theil eines Zylinders oder eines Prisma von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe (§. 24. Zus. I. und II.).

IX. Zusatz: Zwei Kegel verhalten sich, wie zwei Prismen oder zwei Zylinder, mit welchen sie gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben (§. 24. Zus. III.).

X. Zusatz: Kegel von gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundflächen, dann Kegel von gleichen Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen, und überhaupt sind alle Kegel im zusammengesetzten Verhältnisse ihrer Grundflächen und Höhen (§. 24. Zus. IV. a, b und c.).

XI. Zusatz: Zwei Kegel von gleicher Höhe verhalten sich wie die Quadrate der Radien oder Durchmesser ihrer Grundflächen, indem sie nach dem vorigen Zusatze in dieser Voraussetzung mit ihren Grundflächen proportionirt sind, und diese als Kreise sich verhalten wie die Quadrate ihrer Halb- oder Durchmesser (I. §. 165.).

XII. Zusatz: Aehnliche Kegel verhalten sich wie die Kubikzahlen ihrer Höhen, oder wie die Kubikzahlen der Diameter oder Halbmesser ihrer Grundflächen (§. 24. Zus. IV. d.).

XIII. Zusatz: Die Grundflächen gleicher Kegel sind mit ihren Höhen umgekehrt proportionirt (§. 24. Zus. V.).

Anmerkung: 1) Wenn man einen Kegel mit einer Ebene durchschneidet, so heißt jener Theil dieser Ebene, der innerhalb des Kegels fällt, ein Kegelschnitt (Sectio conica).

2) Schneidet man den Kegel durch die Axe, so ist der Kegelschnitt ein Dreieck, und zwar ein gleichschenklichtes Dreieck, im Falle der Kegel senkrecht ist (§. 9. Zus. I.); man nennt dieses Dreieck den Axentriangel, weil in seiner Ebene die Axe des Kegels liegt. Der Axentriangel steht auf der Grundfläche des Kegels senkrecht, und die Durchschnittslinie desselben mit der Grundfläche des Kegels ist ein Durchmesser der letzteren, weil im senkrechten Kegel die Axe auf der Grundfläche senkrecht steht (§. 9. d.), und in jener Durchschnittslinie das Zentrum der Grundfläche des Kegels liegt (§. 9. c.).

3) Wird der Kegel parallel zur Grundfläche geschnitten, so ist der Kegelschnitt ein Kreis (§. 26. Zus. I.), auf welchen im senkrechten Kegel die Axe senkrecht steht (I. §. 180.), der somit auch auf den Axentriangel senkrecht ist (I. §. 177.), und ihre Durchschnittslinie ist der Durchmesser des Kegelschnittes.

Ist demnach (Fig. 16.), der Kegel BAE senkrecht, so

ist das gleichschenklichte Dreieck BAE der Axentriangel, welcher, wie die Axe AC, auf der Grundfläche BE und dem Parallelkreise oder Kegelschnitte FN, senkrecht steht, und der den letzteren im Durchmesser FN schneidet.

4) Nebst den angezeigten zwei Kegelschnitten dem Kreise nämlich und dem Axentriangel sind die drei Kegelschnitte des senkrechten Kegels merkwürdig, welche Ellipse, Parabel und Hyperbel genannt werden.

Es sei (Fig. 21.) das Dreieck BAE, in welchem die Axe CA liegt, der Axentriangel des senkrechten Kegels BAE, und durch einen beliebigen Punkt F einer Seite AE des Axentriangels sei in ihm die Linie FD mit BE parallel gezogen. Dreht sich nun die Linie FD um den Punkt F abwärts, so macht FD mit AE einen Winkel der $>$, oder $=$, oder $<$ BAE ist. Für den ersten Fall erhält man FG, wo der Winkel GFE größer ist als BAE, dann für den zweiten Fall erhält man FP, wo PFE $=$ BAE, also FP $\#$ AB (I. §. 40.), und im dritten Falle erhält man FM, wo MFE $<$ BAE.

5) Wird nun der Kegel mit einer Ebene senkrecht durch den Axentriangel geschnitten, so ist der Kegelschnitt, welcher durch die Linie FG geht, eine Ellipse; geht er durch die Linie FP, so heißt er eine Parabel, und geht er durch FM, so ist er eine Hyperbel. Bei der Ellipse ist dann FG, bei der Parabel ist FP, und bei der Hyperbel ist jene gerade Linie die Axe, welche zwischen F und jenem Punkte liegt, wo die Linien MF und BA, wenn man sie verlängert, zusammen stossen.

6) Die Ellipse ist von einer in sich selbst zurücklaufenden Linie eingeschlossen, so daß die Summe der Entfernungen eines jeden Punktes dieser Linie von zwei innerhalb der Figur sich befindlichen Punkten, welche die Brennpunkte der Ellipse (Foci) heissen, ihrer Axe gleich ist; man unterscheidet bei ihr noch eine andere Axe, welche die kleinere genannt wird.

Die Parabel ist zwischen einer krummen Linie enthalten, die mit ihren Schenkeln zu beiden Seiten der Axe über alle Gränzen ohne Ende fortläuft, so daß jeder Punkt dieser Linie von einem innerhalb liegenden Punkte, welcher der Brennpunkt der Parabel (Focus) heißt, so weit absteht, als der Abstand eines von solchem Punkte auf die Axe gefällten Perpendikels vom Scheitel, und der Abstand des Brennpunktes vom Scheitel zusammen betragen.

Die Hyperbel ist zwischen vier krummen Schenkeln, die gleichfalls ohne Ende fortlaufen, enthalten, so daß

die Differenz der Entfernungen eines jeden Punktes der krummen Linie von zwei innerhalb sich befindlichen Punkten, welche die Brennpunkte der Hyperbel heissen, ihrer Axe gleich ist.

7) Um sich die Begriffe von den Kegelschnitten mehr zu versinnlichen, bedient man sich senkrechter Kegel von Holz, die nach den angegebenen fünf Richtungen durchgeschnitten sind; oder man verzeichnet sich diese Linien, auch außer dem Kegel, auf einer Ebene mittels einiger Vorrichtungen, die sich auf gewisse Eigenschaften dieser krummen Linien gründen; was passend beim mündlichen Vortrage geschehen kann, weßhalb ich hier darüber keine besonderen Vorschriften angebe.

8) Der Axentriangel und der Kreis gehört mit Ausnahme einiger schwererer Sätze des letzteren in das Gebiet der Elementargeometrie (Arithm. I. §. 7. b.); dagegen gehören aber die drei übrigen Kegelschnitte, nämlich die Ellipse, Parabel und Hyperbel zu der Lehre von den krummen Linien, welche in der höheren Geometrie vorgetragen wird (Arithm. I. §. 7. b.); aus diesem Grunde habe ich gegenwärtig von diesen letzteren eine kurze Erwähnung gemacht, und sie gleichsam nur historisch angezeigt.

III. Abschnitt.

Von der Kugel.

§. 27.

I. Lehrsatz:

Um einen gegebenen Mittelpunkt ist durch den Radius die Kugel-Oberfläche und die Kugel selbst vollkommen bestimmt.

Beweis:

1) Ist (Fig. 18.) das Zentrum C und der Halbmesser CE gegeben, so ist die Lage eines jeden Punktes der Oberfläche der Kugel bestimmt, weil alle ihre Punkte vom Zentrum C gleich weit abstehen (§. 10. a.);

2) Eine zweite Kugel-Oberfläche ist bei diesem Zen-

Zentrum und diesem Radius nicht mehr möglich, weil sonst wenigstens ein Punkt von ihr nicht in der ersteren, folglich vom Zentrum C entweder weiter weg, oder ihm näher liegen würde, und im ersten Falle ihr Radius größer, im zweiten aber kleiner wäre, als der Halbmesser CE.

Es ist also durch den Mittelpunkt und den Radius die Oberfläche der Kugel, und deßhalb auch diese letztere vollkommen bestimmt (I. §. 6.).

I. Zusatz: Kugeln und Kugel-Oberflächen von gleichen Radien oder gleichen Durchmessern sind daher kongruent (I. §. 6. Zus.).

II. Zusatz: Stellt man sich vor (Fig. 18.), daß sich der Halbkreis DPE um den Durchmesser DE als Axe rings herum dreht, so entsteht die Kugel, deren Zentrum der Punkt C ist.

Anmerkung: Daß das Zentrum innerhalb der Kugel liegt, und jede Kugel nur ein Zentrum hat, ist aus dem ersichtlich, was im I. Theile dieses Lehrbuches im II. Abschnitte des I. Hauptstückes in Absicht auf den Kreis und die Kreislinie gesagt wurde.

§. 28.

II. Lehrsatz:

Wenn eine Kugel von einer Ebene durchschnitten wird, so ist die Durchschnittsfigur oder der Kugelschnitt ein Kreis.

Beweis:

1) Geht (Fig. 18.) der Kugelschnitt durch das Zentrum C der Kugel, wie die Durchschnittsfigur PDQE, so sind alle Punkte seines Perimeters, der an der Oberfläche der Kugel liegt, vom Zentrum C gleich weit entfernt (§. 10. b.), also ist der Kugelschnitt ein Kreis (I. §. 14. b.);

2) Geht derselbe nicht durch das Zentrum der Kugel, wie die Figur AHBG, so fälle man vom Zentrum auf die Ebene des Kugelschnittes das Perpendikel CK (I. §. 173.), nehme im Perimeter desselben

die zwei beliebigen Punkte F und G an, und ziehe vom Durchschnittspunkte K die geraden Linien KF und KG;

3) Der Halbmesser CA = CB (§. 10. Zus. I.), dann CK = CK, und der Winkel CKA = CKB = 90 Grad, weil CK auf der Ebene des Kugelschnittes senkrecht steht (I. §. 169. a.), also ist das Dreieck CKA ≌ △ CKB (I. §. 34. Zus. II.), und die Linie KF = KG (I. §. 18. Zus. IV.);

4) Die beiden Punkte K und G wurden beliebig angenommen; was demnach so eben erwiesen wurde, gilt von allen Punkten des Perimeters der Durchschnittsfigur; es stehen also alle diese Punkte von dem in der Figur liegenden Punkte K gleich weit ab, weßhalb dieselbe wieder ein Kreis ist.

I. Zusatz: Das Zentrum der Kugel ist vom Kugelschnitte eben so weit entfernt, als vom Durchmesser dieses letzteren. Denn (Fig. 18.) die Linie CK, welche auf die Ebene des Kugelschnittes senkrecht steht, ist auch auf den Durchmesser AB senkrecht, bestimmt also zugleich die Entfernung dieses letzteren und die Entfernung des Kugelschnittes vom Zentrum C (I. §. 33. Zus. II. und §. 173. Zus. II.).

II. Zusatz: Die Durchschnittsfigur oder der Kugelschnitt ist um so größer, je näher er dem Mittelpunkte der Kugel liegt, und im Mittelpunkte der Kugel selbst ein größter Kreis.

Weil (Fig. 18.) das Dreieck ACK rechtwinklicht ist, so ist $AK^2 = AC^2 - CK^2$ (I. §. 97. Zus. II.), also $AK = \sqrt{(AC^2 - CK^2)}$; der Radius AC, also auch AC^2 hat bei der nämlichen Kugel immer die nämliche Größe, je kleiner nun die Entfernung CK, mithin CK^2 ist, desto größer wird die Linie AK, welche der Halbmesser des Kugelschnittes ist (Arithm. I. §. 34. III.), und deßhalb wird auch der Kugelschnitt desto größer (I. §. 15. Zus. IV.), je näher derselbe dem Zentrum des Kreises liegt.

Geht der Kugelschnitt durch das Zentrum, so ist dessen Entfernung davon gleich Null, also CK oder $CK^2 = 0$, mithin $AK = \sqrt{(AC^2 - 0)} = \sqrt{AC^2} =$

AC, das heißt, der Halbmesser eines solchen Kugelschnittes ist gleich dem Halbmesser der Kugel, und der Durchmesser der Kugel ist zugleich der Diameter des Kugelschnittes, weßhalb dieser der möglichst größte Kugelschnitt ist, der das Zentrum der Kugel zu seinem Mittelpunkte hat, und ein größter Kugelkreis genannt wird.

III. Zusatz: Umgekehrt ist der Kugelschnitt desto kleiner, je weiter er vom Mittelpunkte der Kugel entfernt ist, und derselbe verschwindet ganz oder wird gleich Null, wenn er vom Zentrum der Kugel die größte Entfernung hat, mithin diese letztere dem Halbmesser der Kugel gleich ist.

IV. Zusatz: Aus den so eben im II. Zusatze angeführten Gründen folgt auch, daß die Kugelsehne (§. 10. c.) desto größer ist; je näher sie dem Zentrum der Kugel liegt, und im Zentrum selbst die größte Sehne, also ein Durchmesser der Kugel ist; wie auch umgekehrt, daß die Kugelsehne desto kleiner wird, je mehr sie sich vom Zentrum der Kugel entfernt, und ganz verschwindet oder gleich Null ist, wenn ihre Entfernung vom Zentrum der Kugel den Halbmesser der letzteren beträgt.

V. Zusatz: Ein Perpendikel vom Mittelpunkte der Kugel auf die Ebene eines kleineren Kugelschnittes oder Kugelkreises geht durch das Zentrum des letzteren, da in Gemäßheit des dem vorstehenden Lehrsatze beigefügten Beweises (Fig. 18.) das Perpendikel CK in der Ebene des Kugelschnittes auf einen Punkt K fällt, der von allen Punkten der Peripherie gleich weit absteht, also das Zentrum des Kugelkreises ist.

VI. Zusatz: Errichtet man vom Mittelpunkte des Kugelkreises auf dessen Ebene ein Perpendikel, so geht es durch das Zentrum der Kugel. Denn sonst könnte man (Fig. 18.) auf die Ebene des kleineren Kugelkreises ein Perpendikel errichten; dieses ginge auch durch das Zentrum des Kugelkreises (Zus. V.), und es gäbe von einem Punkte auf die Ebene des Kugelkreises zwei verschiedene Perpendikel, was nicht möglich ist (I. §. 174. Zus.).

4 *

VII. Zusatz: Eine gerade Linie, welche den Mittelpunkt der Kugel und das Zentrum eines kleineren Kugelkreises verbindet, steht auf die letztere Kreisebene senkrecht. Denn ein Perpendikel, das vom Zentrum der Kugel auf die Ebene des kleineren Kugelkreises gezogen wird, geht durch den Mittelpunkt des letzteren (Zus. V.), und zwischen den zwei Mittelpunkten ist nur eine einzige gerade Linie möglich (I. §. 3. Zus. II.), also muß die gerade Linie, welche diese Mittelpunkte verbindet, auf der Ebene des kleineren Kugelkreises senkrecht stehen.

VIII. Zusatz: Zwei Kugelkreise der nämlichen Kugel sind gleich oder ungleich, je nachdem ihre Entfernung vom Mittelpunkte der Kugel gleich oder ungleich ist, und bei ungleichen Kugelkreisen ist derjenige größer, der dem Zentrum der Kugel näher liegt.

Sind (Fig. 18.) die Kugelkreise AB und NO gegeben, und ihre Entfernungen vom Zentrum der Kugel, welche durch die Perpendikel CK und CR bestimmt werden (I. §. 173. Zus. II.), einander gleich, also $CK = CR$, mithin auch $CK^2 = CR^2$, so ist, weil der Radius $CA = CN$ und also $CA^2 = CN^2$, die Differenz $CA^2 - CK^2 = CN^2 - CR^2$ (Arithm. I. §. 34. I.); nun ist $CA^2 - CK^2 = KA^2$, und $CN^2 - CR^2 = RN^2$ (I. §. 97. Zus. II.), folglich $KA^2 = RN^2$ (Arithm. I. §. 10. Nro. 4.), und $KA = RN$, das ist, die beiden Kugelkreise haben gleiche Radien, und sind also einander gleich (I. §. 15. Zus. I.), da die Perpendikel CK und CR auf die Mittelpunkte derselben fallen (Zus. V.).

Wäre CK kleiner als CR, also der untere Kugelkreis dem Mittelpunkte der Kugel näher als der obere, so wäre CK^2 kleiner als CR^2, und also $CA^2 - CK^2$ größer als $CN^2 - CR^2$ (Arithm. I. §. 34. III.), mithin KA^2 größer als RN^2 (I. 97. Zus. II.) und $KA > RN$, das heißt, bei ungleichen Entfernungen sind die Kugelkreise ungleich, und derjenige Kugelkreis, der dem Mittelpunkte der Kugel näher liegt, hat einen größeren Halbmesser, und ist somit größer (I. §. 15.

Zus. IV.), als der andere Kugelschnitt, welcher vom Zentrum der Kugel weiter entfernt ist.

IX. Zusatz: Gleiche Kugelkreise haben gleiche Entfernungen vom Mittelpunkte der Kugel, und ungleiche Kugelkreise haben davon ungleiche Entfernungen, so daß der größere Kugelkreis dem Zentrum der Kugel näher liegt.

X. Zusatz: Wenn eine Kugelsehne durch den Mittelpunkt des Kugelkreises auf die Ebene desselben senkrecht steht, so ist sie ein Durchmesser der Kugel, dessen Endspunkte von allen Punkten der Peripherie des Kugelkreises gleich weit abstehen.

Ist (Fig. 22.) die Kugelsehne AB im Zentrum E auf die Ebene des Kugelkreises DF senkrecht, so geht sie durch das Zentrum der Kugel (Zus. VI.), und ist deßhalb ein Diameter der Kugel (§. 10. c.).

Nimmt man in der Peripherie des Kugelkreises zwei beliebige Punkte R und H an, und zieht man von den Endspunkten des Durchmessers zu den Punkten R und H Kugelsehnen, so ist der Radius ER = EH, dann AE = AE, und der Winkel AER = AEH (I. §. 169. a.), also △ AER ≌ △ AEH (I. §. 20.), und AR = AH (I. §. 18. Zus. IV.), das heißt, der Punkt A steht von den beliebig angenommenen Punkten R und H, also aus den nämlichen Gründen von allen Punkten der Peripherie des Kugelkreises gleich weit ab.

Eben dieses gilt in Absicht auf den unteren Punkt B der Kugelsehne AB, da ER = EH, dann EB = EB, und der Winkel, REB = BEH, also △ REB ≌ △ BEH, und BR = BH.

XI. Zusatz: Wenn zwei Punkte an der Oberfläche der Kugel von allen Punkten der Peripherie eines Kugelkreises gleich weit abstehen, so geht die gerade Linie, welche sie verbindet, durch das Zentrum des Kugelkreises, steht auf der Ebene des letzteren senkrecht, und ist ein Durchmesser dieses Kreises.

Nimmt man (Fig. 22.) in der Peripherie des Kugelkreises die beliebigen Punkte R und H an, und zieht man auf die vorige Weise die Kugelsehnen, so ist, wenn

A und B die beiden gegebenen Punkte sind, nach der Voraussetzung AR = AH, dann BR = BH und AB = AB, also △ ARB ≌ △ AHB (I. §. 24.), und der Winkel RAE = EAH (I. §. 18. Zus. IV.); ferner ist AE = AE, mithin △ AER ≌ △ AEH (I. §. 20.), und ER = EH, wie auch der Winkel AER = AEH, das ist, die Linie AB schneidet den Kugelkreis in einem Punkte E, der von den beliebig angenommenen Punkten R und H, also von allen Punkten der Peripherie gleich weit entfernt, mithin das Zentrum des Kugelkreises ist.

Sind die Punkte R und H mit dem Zentrum E in einer geraden Linie, wie es die Punkte D und F sind, so erkennt man wegen der Kongruenz der Dreiecke AED und AEF, daß AED und AEF als gleiche Nebenwinkel rechte Winkel sind (I. §. 8. c.), und AE auf DF perpendikulär ist (I. §. 9. Zus. IV.); nimmt man nun zwischen D und F den Punkt R an, dessen Radius ER mit DE keinen geraden Winkel bildet (I. §. 7. Zus. I.), so ist aus den angeführten Gründen das Dreieck AER auch mit AED kongruent, und der Winkel AER wie AED ebenfalls ein rechter Winkel. Die Linie AB steht auf ED und ER senkrecht, und ist demnach im Mittelpunkt E ein auf die Ebene des Kugelkreises senkrechter Durchmesser der Kugel.

XII. Zusatz: Wenn ein Punkt an der Oberfläche der Kugel von allen Punkten der Peripherie eines Kugelkreises gleich weit absteht, so ist die gerade Linie, welche von diesem Punkte auf das Zentrum des Kreises gezogen wird, auf die Ebene dieses letzteren senkrecht, und ein Durchmesser der Kugel, wenn man sie auf der andern Seite bis zur Oberfläche derselben verlängert.

Steht (Fig. 22.) der Punkt A von allen Punkten der Peripherie des Kugelkreises gleich weit ab, und man nimmt auf die vorige Weise in dieser Peripherie die Punkte D, R und F an, so ist AD = AR = AF, ferner ED = ER = EF, und AE = AE = AE, also sind die Dreiecke ADE, AER und AEF kongruent, mithin die Winkel AED und AER rechte Win-

kel, folglich steht AE auf der Ebene des Kugelkreises senkrecht, und gibt bis zur Oberfläche bei B verlängert, den Durchmesser AB der Kugel (Zus. VI.).

Anmerkung: 1) Wird die Kugel mit einer Ebene durchschnitten, so ist nach dem aufgestellten Lehrsatze die Durchschnittsfigur oder der Kugelschnitt allezeit ein Kreis; deßwegen nennt man die Kugelschnitte Kugelkreise, und zwar kleinere Kugelkreise oder größte Kugelkreise, je nachdem ihre Ebene durch das Zentrum der Kugel geht, oder nicht.

2) Kugelkreise nennt man Parallelkreise, wenn ihre Ebenen parallel sind (I. 179.).

3) Aus dem II. Zusatze ist ersichtlich, daß die Parallelkreise eines größten Kugelkreises kleinere Kugelkreise sind, die immer kleiner werden, je mehr sie sich vom größten Kugelkreise entfernen.

4) Alle größten Kugelkreise sind einander gleich, weil sie mit der Kugel das nämliche Zentrum, und sohin damit den nämlichen Radius oder Durchmesser haben (§. 10. Zus. IV.).

5) Durch zwei Punkte der Kugel-Oberfläche läßt sich allemal ein größter Kugelkreis beschreiben, und der Durchmesser eines kleineren Kugelkreises ist allemal die Sehne eines größten Kugelkreises, indem man durch zwei solche Punkte und durch das Zentrum der Kugel allemal eine Ebene legen (I. §. 168. b.), und mit dem Radius der Kugel einen Kreis beschreiben kann.

6) Das Stück von der Oberfläche der Kugel, welches zwischen zwei Parallelkreisen liegt, heißt ein Streifen oder Gürtel der Oberfläche der Kugel, und jenen Theil der Kugel, welcher zwischen solchen Kreisen ist, nennt man eine Kugelzone.

7) Weil der Kugelschnitt oder die Durchschnittsfigur immer ein Kreis ist (Lehrs.), so hat sowohl das Segment der Kugel und der Kugel-Oberfläche (§. 10. d.), als auch der Ausschnitt oder Sektor der Kugel (§. 10. e.) zum Perimeter der Grundfläche die Peripherie eines Kreises.

§. 29.

Die Pole und die Axe der Kugel.

a) Zwei Punkte an der Oberfläche der Kugel, welche von allen Punkten der Peripherie eines Kugelkreises gleich weit abstehen, heißt man die Pole dieses Kreises; und

b) die gerade Linie oder Kugelsehne, welche diese zwei Punkte mit einander verbindet, nennt man die Axe desselben.

So sind (Fig. 22.) die Punkte A und B die Pole, und die Kugelsehne AB ist die Axe des Kugelkreises DF.

I. Zusatz: Man findet die Pole eines Kugelkreises, wenn man auf ihn in seinem Zentrum ein Perpendikel errichtet, und dieses bis an die Oberfläche der Kugel verlängert; indem (Fig. 22.) die im Zentrum E des Kugelkreises errichtete senkrechte Linie verlängert an der Oberfläche der Kugel die beiden Punkte A und B bestimmt, welche von allen Punkten der Peripherie des Kugelkreises gleich weit entfernt, und deßhalb die Pole des letzteren sind (§. 28. Zus. X.).

II. Zusatz: Wenn zwei Punkte die Pole eines Kugelkreises sind, so steht die Axe, welche sie verbindet, auf der Ebene dieses Kreises senkrecht, und geht durch das Zentrum desselben. Denn (Fig. 22.) wenn A und B die Pole des Kugelkreises DF sind, welche von seiner Peripherie überall gleich weit abstehen, so steht die gerade Linie AB, welche die Axe des Kugelkreises ist, auf der Ebene desselben senkrecht, und geht durch sein Zentrum (§. 28. Zus. XI.).

III. Zusatz: Die Axe eines Kugelkreises geht allezeit durch das Zentrum der Kugel; weil sie nach dem vorigen Zusatze durch das Zentrum des Kugelkreises geht, und auf dessen Ebene senkrecht steht (§. 28. Zus. VI.).

IV. Zusatz: Die Axe eines Kugelkreises ist demnach eine zwischen den Polen gezogene Kugelsehne, welche durch den Mittelpunkt der Kugel geht (Zus. III.), also ein Durchmesser derselben ist (§. 10. c.), welcher im Mittelpunkte des Kugelkreises auf dessen Ebene senkrecht steht (Zus. II.).

V. Zusatz: Bei einem kleineren Kugelkreise erhält man auch die Pole und die Axe, wenn man vom Zentrum der Kugel zum Mittelpunkte des Kugelkreises eine gerade Linie zieht, und diese bis zur Oberfläche der Kugel verlängert, indem (Fig. 22.) die gerade Linie EC, welche die Mittelpunkte E und C ver-

bindet, auf der Ebene des Kugelkreises senkrecht steht (§. 28. Zus. VII.), und deßhalb verlängert an der Oberfläche der Kugel die Pole A und B bestimmt (Zus. I.), so daß AB die Axe dieses Kugelkreises ist (§. 29. b.).

VI. Zusatz: Zwei Kugelkreise, die einerlei Pole haben, sind Parallelkreise.

Denn (Fig. 22.) haben die Kugelkreise DF und GH die nämlichen Pole A und B, so haben sie auch die gemeinschaftliche Axe AB (I. §. 3. Zus. II.), diese steht auf die Ebenen beider Kugelkreise senkrecht (Zus. IV.), weßhalb die Kugelkreise parallel sind (I. §. 179. Zus. I.).

VII. Zusatz: Zwei Parallelkreise haben einerlei Pole.

Ist (Fig. 23.) der Kugelkreis FG mit dem Kugelkreise OP, parallel, und man errichtet vom Mittelpunkte N des unteren Kugelkreises das Perpendikel NC, so bestimmt dieses, bis zur Kugel-Oberfläche verlängert, die Pole A und B, und die Linie AB wird die Axe dieses Kugelkreises (Zus. I.); die Axe AB geht ferner durch das Zentrum der Kugel (Zus. IV.), steht auf dem Parallelkreise FG ebenfalls senkrecht (I. §. 180.), und geht durch das Zentrum dieses Kugelkreises (§. 28. Zus. V.), weßhalb die Endspunkte A und B auch die Pole des Kreises FG sind (Zus. I.), gleichwie AB die gemeinschaftliche Axe beider Kugelkreise ist.

Anmerkung: Ist einer der beiden Parallelkreise ein größter Kugelkreis, wie (Fig. 22.) der Kreis GH, so geht die Axe AB des unteren Parallelkreises DF durch das Zentrum der Kugel C, welches zugleich der Mittelpunkt des größten Kugelkreises ist, steht da auf dessen Ebene senkrecht, ist also auch die Axe desselben, und ihre Endspunkte sind zugleich die Pole dieses größten Kugelkreises.

§. 30.

Berührungs-Ebene der Kugel.

Eine Ebene, welche mit der Oberfläche der Kugel nur einen Punkt gemein, und sonst außer ihr liegt, ist eine **Berührungs-Ebene**; wie (Fig. 22.) die Ebene LS.

I. Zusatz: Eine Ebene ist eine Berührungs-Ebene der Kugel, wenn sie mit der Oberfläche der Kugel so einen Punkt gemein hat, daß der Radius der Kugel auf ihr senkrecht steht.

Denn hat (Fig. 22.) die Ebene LS mit der Oberfläche der Kugel den Punkt B so gemein, daß auf sie der Radius CB senkrecht steht, und man nimmt in der Ebene einen beliebigen anderen Punkt Q an, und zieht die gerade Linie BQ, so ist wegen des rechten Winkels bei B das Dreieck CBQ rechtwinklicht (I. §. 169. a.), und also CQ größer als CB (I. §. 30. Zus. IV.), das ist, der beliebig angenommene Punkt Q liegt außerhalb der Kugel, was aus dem nämlichen Grunde von allen übrigen Punkten der Ebene gilt; diese hat demnach mit der Oberfläche der Kugel nur den Punkt B gemein, und liegt übrigens ganz außer ihr, also ist dieselbe eine Berührungs-Ebene.

II. Zusatz: Wenn man vom Mittelpunkte der Kugel auf die Berührungs-Ebene an den Berührungspunkt eine gerade Linie, somit einen Radius zieht, so steht er auf dieser Ebene senkrecht.

Denn wäre (Fig. 22.) der Radius CB am Berührungspunkte B auf die Berührungs-Ebene LS nicht senkrecht, so könnte man vom Zentrum C auf die Ebene LS ein anderes Perpendikel, etwa CQ ziehen, und im Dreiecke CQB wäre wegen des rechten Winkels bei Q die Hypothenuse CB größer als CQ, so daß also der Punkt Q innerhalb der Kugel läge, und die Ebene LS gegen die Annahme keine Berührungs-Ebene wäre.

III. Zusatz: Durch einen Punkt der Oberfläche der Kugel gibt es nur eine einzige Berührungs-Ebene. Denn gäbe es noch eine andere solche Ebene, so müßte am Berührungspunkte der Radius auf ihr ebenfalls senkrecht sein (Zus. II.), welches aber nicht möglich ist (I. §. 169. Zus. IV.).

IV. Zusatz: Wenn man durch den Berührungspunkt auf die Berührungs-Ebene ein Perpendikel zieht, so geht dieses durch das Zentrum der Kugel.

Denn ginge (Fig. 22.) dieses Perpendikel nicht

durch das Zentrum der Kugel, wie die Linie BH, so könnte man auf den Berührungspunkt den Radius CB ziehen, der ebenfalls auf die Ebene LS senkrecht stände (Zus. II.), so daß es jetzt am Punkte B auf die Ebene LS zwei Perpendikel BH und BC gäbe, was aber unmöglich ist (I. §. 174. Zus.); also muß das Perpendikel, welches am Berührungspunkte auf die Ebene errichtet wird, durch das Zentrum der Kugel gehen.

§. 31.

III. Lehrsatz:

Eine gerade Linie kann die Oberfläche der Kugel nur in zwei Punkten schneiden.

Beweis:

1) Man lege (Fig. 22.) durch das Zentrum C der Kugel, und durch die Punkte D und F, in welchen die gerade Linie DF die Oberfläche der Kugel schneidet, den größten Kreis DAFBD (§. 28. Anmerk. 5.), das ist, so eine Ebene, daß alle ihre Punkte, welche sie mit der Kugel-Oberfläche gemein hat, die Peripherie eines größten Kugelkreises bilden;

2) In dieser Kreisebene liegen die beiden Endspunkte der geraden Linie DF, also liegen in ihr alle Punkte dieser Linie (I. §. 3. Zus. III. und §. 4. Zus.);

3) Würde nun die Linie DF die Oberfläche der Kugel außer den Punkten D und F noch in einem dritten Punkte schneiden, so müßte dieser auch in der Peripherie des größten Kugelkreises sein, und die gerade Linie würde eine Kreislinie in drei Punkten schneiden, was nicht möglich ist (I. §. 55.).

I. Zusatz: Die Peripherien zweier Kugelkreise können sich nur in zwei Punkten durchschneiden.

Denn (Fig. 22.) die beiden Kreisebenen GAHB und DPFH schneiden einander in der geraden Linie DF (I. §. 168. Zus. II.); würden nun die Peripherien beider Kreise, derer alle Punkte in der Oberfläche der Kugel liegen, außer D und F noch einen drit-

ten Punkt gemein haben, so müßte dieser in der Durchschnittslinie DF liegen, somit diese gerade Linie die Oberfläche der Kugel in drei Punkten durchschneiden, was nach dem aufgestellten Lehrsatze nicht möglich ist.

II. Zusatz: Zwei größte Kugelkreise halbiren sich in einem gemeinschaftlichen Durchmesser. Denn das Zentrum der Kugel ist für sie ein gemeinschaftlicher Punkt, also schneiden sie sich in einer geraden Linie (I. §. 168. Zus. II.), welche, da in ihr das Zentrum der Kugel liegt, und sie sich an der Oberfläche der Kugel endet, für beide Kreise ein gemeinschaftlicher Durchmesser ist (I. §. 14. f.), und deßhalb beide halbirt (I. §. 14. Zus. VI.).

III. Zusatz: Zwei Kugelkreise, welche einander halbiren, sind größte Kreise.

Denn wenn (Fig. 22.) die Kreise GNH und GAHB einander halbiren, so muß ihre Durchschnittslinie GH ein gemeinschaftlicher Durchmesser für beide, und ihr Mittelpunkt das Zentrum der Kugel sein. Wäre ihr Zentrum C nicht auch zugleich der Mittelpunkt der Kugel, so könnte man vom Zentrum der Kugel zum gemeinschaftlichen Mittelpunkte beider Kugelkreise eine gerade Linie ziehen (§. 3. Zus. I.), und diese wäre auf beide Kreise senkrecht, die sich schneiden (§. 28. Zus. VII.), was aber nicht möglich ist (I. §. 169. Zus. IV.); es haben also beide Kugelkreise mit der Kugel das nämliche Zentrum, und sind deßhalb größte Kreise (§. 28. Anm. 1.).

§. 32.

Keilförmiger Ausschnitt der Kugel.

Der Theil der Kugel, welcher zwischen zwei größten Halbkreisen liegt, heißt ein keilförmiger Ausschnitt der Kugel, wie (Fig. 23.) das Stück AQBRA, welches durch die zwei größten Halbkreise AQB und ARB, die sich im Diameter AB schneiden, gleichsam aus der Kugel ausgeschnitten wird.

I. Zusatz: Die Größe eines keilförmigen Ausschnittes ist für eine gegebene Kugel durch den Neigungswinkel der größten Halbkreise, zwischen welchen

er liegt, bestimmt (I. §. 6.), und (Fig. 23.) diesen Neigungswinkel erhält man, wenn man von einem gemeinschaftlichen Punkte des Durchmessers AB, etwa vom Zentrum C auf ihn die Perpendikel CQ und CR errichtet (I. §. 32.), und man dadurch den Winkel QCR bildet, der, wie sein Bogen QR (I. §. 63. Zus. II.), die Neigung der beiden größten Halbkreise zu einander bestimmt (I. §. 176. Zus. III.).

II. Zusatz: Keilförmige Ausschnitte einer Kugel, derer Halbkreise gleiche Neigungswinkel machen, sind kongruent (I. §. 6. Zus.).

III. Zusatz: Ein größter Kugelkreis theilet die Kugel in zwei gleiche Theile.

Denn (Fig. 23.) der obere Theil DAE der Kugel, und der untere DBE sind keilförmige Ausschnitte der beiden größten Halbkreise DPE und DQE, welche auf beiden Seiten einen Neigungswinkel von 180 Grad bilden, da der gerade Winkel PCQ = 180 Grad (I. §. 11. Zus. II.), gleichwie die Bögen PAQ und PBQ als Halbkreise 180 Grad halten (I. §. 62. a.), da die auf AB senkrechten Radien CP und CQ den Durchmesser PQ bilden, welcher die Peripherie des größten Kugelkreises PAQB halbirt (I. §. 14. Zus. VI.).

IV. Zusatz: Dreht sich der Quadrant rings um einen Radius als Axe, so beschreibt er eine Halbkugel. Denn (Fig. 18.) wenn sich der Halbkreis DPE um den Durchmesser DE als Axe dreht, so beschreibt er eine Kugel (§. 27. Zus. II.), und der Radius CP einen größten Kugelkreis derselben (I. §. 15.), welcher die ganze Kugel in zwei gleiche Segmente theilet (Zus. III.), weßhalb der über diesen Kreis sich befindliche Theil der Kugel, den der Quadrant PCD beschreibt, eine Halbkugel ist.

V. Zusatz: Beim Umdrehen des Halbkreises DPE (Fig. 18.), oder des Quadranten PCD um DE oder DC als Axe beschreibt der sehr kleine Bogen Dd einen Theil der Oberfläche der Kugel, der ebenfalls sehr klein ist, und immer mehr abnimmt, je kleiner der Bogen Dd angenommen wird; so wie nun der kleine Bogen von seiner Sehne, das ist, von der geraden Li-

nie, wenig abweicht, welche seine Endspunkte verbindet (I. §. 129.), eben so ist auch der beschriebene kleine Theil der Kugel-Oberfläche von einer Ebene, welche die nämliche Gränze hat, unmerklich unterschieden.

VI. Zusatz: Eine kleine Ebene läßt sich als ein Stück von der Oberfläche der Kugel betrachten, deren Halbmesser sehr groß ist. Denn (Fig. 18.) wenn sich der Winkel DCQ um den Schenkel DC als Axe rings herum dreht, so beschreibt der andere Schenkel CQ eine Ebene (I. §. 171.); nun kann aber diese gerade Linie CQ als ein Bogen eines Kreises, dessen Radius sehr groß ist (I. §. 112. Zus. IV.), und deßhalb die beim Umdrehen erzeugte Ebene als ein Stück der Oberfläche der Kugel mit eben diesem sehr großen Halbmesser betrachtet werden.

Anmerkung: Wenn ein Kugelschnitt ein kleinerer Kugelkreis ist, also nicht durch das Zentrum der Kugel geht, so theilet er die Kugel in zwei ungleiche Segmente, von welchen das größere auf der Seite des Zentrums liegt; was ohne Anführung eines weiteren Beweises aus dem ersichtlich ist, was rücksichtlich der Theilung in Absicht auf den Kreis und seine Sehnen gesagt wurde (I. §. 60. Zus. VI.).

§. 33.

IV. Lehrsatz:

Die Kugel läßt sich als eine Pyramide betrachten, welche die Oberfläche der Kugel zur Grundfläche, und den Radius derselben zur Höhe hat.

Beweis:

1) Man stelle sich die Oberfläche der Kugel in unendlich viele kleine Theile, und von allen Gränzpunkten dieser Theilchen nach dem Mittelpunkte der Kugel gerade Linien vor;

2) Jedes dieser Theilchen kann wie eine Ebene (§. 32. Zus. VI.), und deßhalb als die Grundfläche einer Pyramide betrachtet werden, die ihre Spitze im Mittelpunkte der Kugel, somit deren Radius zur Höhe hat;

3) Alle diese Grundflächen machen zusammen die

Oberfläche der Kugel, und die Pyramiden, welche eine gleiche Höhe haben, die Kugel aus;

4) Also läßt sich die Kugel wie eine Pyramide betrachten, welche die Oberfläche derselben zur Grundfläche, und den Radius zur Höhe hat (§. 23.).

§. 34.

Sphärischer Winkel und sphärisches Dreieck.

a) Ein Winkel, den die Bögen zweier größter Kreise einer Kugel bilden, heißt ein sphärischer Winkel.

b) Der Punkt, in welchem diese Bögen zusammen stoßen, heißt der Scheitel, und die Bögen selbst heissen die Schenkel des sphärischen Winkels.

So ist (Fig. 23.) der Winkel QAR ein sphärischer Winkel, der Punkt A ist der Scheitel, und die Bögen AQ und AR als Theile größter Kreislinien sind die Schenkel desselben.

c) Das Maaß eines sphärischen Winkels ist der zwischen seinen Schenkeln enthaltene Bogen eines größten Kreises, den man durch die Endspunkte der Schenkel legt, von welchen man jeden so groß macht, wie einen Quadranten (I. §. 62. a.).

Wenn daher (Fig. 23.) die Bögen AQ und AR, welche zu größten Kreisen gehören, Quadranten sind, und man durch ihre Endspunkte Q und R einen größten Kreis legt, so ist der dadurch bestimmte Bogen QR, welcher dem Zentriwinkel QCR als dem Neigungswinkel der beiden größten Kreise zu einander gleich ist (I. §. 63. Zus. II.), das Maaß des sphärischen Winkels QAR.

d) Ein sphärischer Winkel heißt ein rechter, oder ein spitziger oder stumpfer Winkel, je nachdem sein Maaß 90, oder weniger oder mehr als 90 Grad hält.

Deswegen ist (Fig. 23.) der Winkel QAE ein rechter, dann QAR ein spitziger, und DAR ein stumpfer Winkel, wenn der Bogen QE $= 90°$, dann QR $<$ $90°$, und der Bogen DR oder DQR $>$ 90 Grad ist.

e) Jeder Theil der Oberfläche der Kugel, welcher von drei Bögen größter Kreise begränzt wird, heißet ein sphärisches Dreieck, oder ein Kugeldrei-

eck; die sphärischen Winkel, welche auf diese Weise entstehen, nennt man die Winkel, und die Bögen die Seiten eines solchen Dreieckes, derer Größe, weil sie Bögen von Kreislinien, und als diese ihren Zentriwinkeln gleich sind (I. §. 63.) in Graden, Minuten ꝛc. ausgedrückt wird.

So ist (Fig. 23.) das Stück QAR der Kugel-Oberfläche ein Kugeldreieck, die Bögen AQ, AR und QR sind die Seiten, und die sphärischen Winkel Q, A und R sind die Winkel desselben.

f) Ein sphärisches Dreieck, welches einen rechten Winkel hat, heißt rechtwinklicht;, im Gegentheile aber, wenn es keinen rechten Winkel hat, schiefwinklicht.

Im rechtwinklichten Kugeldreiecke, in welchem ein Winkel, oder zwei oder alle drei Winkel rechte Winkel sein können, heißt die Seite, welche dem rechten Winkel gegenübersteht, die Hypotenuse, und die Seiten, welche den rechten Winkel einschließen, die Perpendikel desselben.

Nimmt man im schiefwinklichten Kugeldreiecke eine Seite als Grundlinie an, so heißt der Bogen, welcher von dem gegenüberstehenden Winkel als der Spitze auf dieselbe, oder auf ihre Verlängerung senkrecht steht, das Perpendikel dieses Dreieckes.

Anmerkung: 1) Von geradlinigten Winkeln (I. §. 7. a.), und geradlinigten Dreiecken (I. §. 13. a.), welche gerade Linien bilden, unterscheiden sich die sphärischen Winkel, und die Kugeldreiecke dadurch, daß sie auf der Oberfläche der Kugel von Kreisbögen gebildet und eingeschlossen werden, und daher ihre Schenkel und Seiten krumme Linien, und die Dreiecke krumme Flächen sind.

2) Die weiteren Sätze in Absicht auf die Kugelkreise und die sphärischen Dreiecke werden in der sphärischen Trigonometrie vorkommen. Ich habe hier davon nur eine kurze Erwähnung zur Erläuterung jener Begriffe gemacht, die darüber in den folgenden Hauptstücken vorgetragen werden, bevor die sphärische Trigonometrie abgehandelt wird, welche die Kugeldreiecke zum Gegenstande hat, während in der ebenen, oder Plan-Trigonometrie die geradlinigten Dreiecke berechnet werden (Arithm. I. §. 6. c.).

III.

III. Hauptstück.

Von der Ausmessung der Körper und ihrer Oberflächen.

I. Abschnitt.

Von dem Prisma und dem Zylinder.

§. 35.

I. Lehrsatz:

Wenn die Seite eines Würfels in der Länge eines senkrechten Parallelepipedums m mal, dann in dessen Breite n mal, und in der Höhe desselben p mal enthalten ist, und m, n und p ganze Zahlen sind, so ist der Würfel im senkrechten Parallelepipedum so oft enthalten, als die Zahl 1 im Produkte mnp, oder das Parallepipedum ist mnp mal größer, als der Würfel.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 24.) der Körper AG ein rechtwinklichtes oder senkrechtes Parallelepipedum (§. 18. b.), und ag ein Würfel oder Kubus (§. 18. c.), dessen Seite ab in der Länge AB, dann in der Breite AD und in der Höhe AE so oft enthalten ist, als es überhaupt die ganzen Zahlen m, n und p ausdrücken;

2) Weil nach der Annahme die Seite ab des Würfels in der Länge AB des Parallelepipedums m mal enthalten, und m eine ganze Zahl ist, so läßt sich der Würfel ag längs AB neben sich m mal hinlegen, so daß das dadurch entstandene Parallelepipedum Br die Summe von m Würfeln ist, welche gleich dem Würfel ag sind, oder Parallelepipedum Br = m. Kub. ag;

3) Das senkrechte Parallelepipedum Br läßt sich im gegebenen AG auf der Grundfläche BD so oft ne-

ben sich hinlegen, als die Seite ab in der Breite AD enthalten ist, also so oft, als es die ganze Zahl n ausdrückt, mithin ist das Parallelepipedum Bs das n fache des Parallelepipedum Br, oder Parallelep. Bs = n . Parallelep. Br, folglich nach Nro. 1. auch = mn . Kub. ag, wenn man nämlich anstatt des Parallelepipedums Br den m fachen Würfel ag setzt;

4) Das senkrechte Parallelepipedum Bs läßt sich endlich in der Höhe AE so oft auf sich hinlegen, als ab in AE enthalten ist, also so oft, als es die ganze Zahl p ausdrückt, daher ist das Parallelep. AG = p . Parallelep. Bs = mnp . Kub. ag.

5) Da das Parallelepipedum AG, oder 1 × Parallelep. AG = mnp . Kub. ag, so verhält sich (IV. §. 35. Zus. VI.).

1 : mnp = Kub. ag : Parallelep. AG,

oder Kub. ag : Parallelep. AG = 1 : mnp;

das heißt, der Würfel ag ist im senkrechten Parallelepipedum AG so oft enthalten, als die Zahl 1 im Produkte mnp.

I. Zusatz: Ist m = 4, dann n = 5 und p = 3, so ist das Parallelepipedum AG = 4 . 5 . 3 Kub. ag = 60 Kub. ag, das heißt, dasselbe hält nach seinem körperlichen Inhalte 60 solche Würfel, oder die Größe des Würfels ag verhält sich zur Größe des senkrechten Parallelepipedums, wie die Zahl 1 zum Produkte 60.

II. Zusatz: Für jedes senkrechte Parallelepipedum läßt sich ein Kubus angeben, dessen Seite das gemeinschaftliche Maaß der Länge, Breite und Höhe desselben ist, so daß die Zahlen m, n und p, welche die Größe dieser drei Linien angeben, ganze Zahlen sind.

Denn wenn (Fig. 24.) die Seite ab des Würfels ag nicht das gemeinschaftliche Maaß der drei Seiten AB, AD und AE ist (Arithm. III. §. 60. a.), so nehme man einen aliquoten Theil von ab, und verzeichne darüber einen Kubus (§. 18. Zus. III.), und untersuche, ob nicht dieser aliquote Theil das gemeine Maaß für AB, AD und AE ist; findet wieder das Gegentheil

statt, so kann man immer kleinere aliquote Theile von ab nehmen, bis man endlich auf einen solchen kömmt, der alle drei Seiten des Parallelepipedums so genau mißt, daß der bleibende Rest als unbedeutend nicht mehr in Betracht zu ziehen ist; verzeichnet man dann aus einem solchen Theile einen Kubus, so mißt dessen Seite die Seiten des Parallelepipedums, und m, n und p werden ganze Zahlen.

Mißt z. B. der baierische Fuß nicht genau die drei Seiten eines senkrechten Parallelepipedums, so nehme man den 10ten Theil desselben oder einen Zoll; bestimmt auch dieser die Länge, Breite und Höhe desselben nicht genau, so nehme man zum Maaße den 10ten Theil des Zolles oder eine Linie, und wenn dadurch die genannten Seiten noch nicht ganz genau bestimmt werden können, so nehme man als Maaß den 10ten Theil der Linie, welcher Skrupel genannt wird (Arithm. 1. §. 79.); dann verzeichne man sich Würfel über die Linien, welche die Seiten des senkrechten Parallelepipedums so genau messen, als es die vorliegende Aufgabe erfordert, und es ist der zum Maaße genommene Würfel im Parallelepipedum so oft enthalten, als die Zahl 1 im Produkte mnp, oder dasselbe hält nach seinem Kubik-Inhalte mnp solche Würfel.

§. 36.

Das Maaß der Körper.

a) Weil der Würfel oder Kubus, welcher unter den regulären Körpern das Hexaeder ist (§. 3. e.), durch eine einzige Seite, somit auf die einfachste Weise bestimmt ist (§. 18. Zus. III.), so nimmt man Würfel von bekannter Größe an, um ihr Verhältniß zu andern Körpern, und dadurch die Größe der letztern zu bestimmen; diese Würfel sind dann das Maaß der Körper, und werden Körper-Maaße genannt, weil man durch sie den körperlichen Inhalt oder die Größe des Raumes bestimmt, den die Körper einnehmen.

b) Einen Körper messen heißt sein Verhältniß zum Körpermaaße angeben, somit bestimmen, wie oft

das Körpermaaß, oder ein gewisser Theil davon gesetzt werden muß, um den Körper zu erhalten, welcher gemessen wird (Arithm. I. §. 2.).

I. Zusatz: Weil die eingeführten Körpermaaße Kubikruthen, Kubikschuhe, Kubikzolle rc. genannt werden (Arithm. I. §. 81.), so wird ein Körper gemessen, wenn man die Größe desselben in Kubikruthen, Kubikschuhen, Kubikzollen rc. angibt, das heißt, wenn man bestimmt, wie viele Kubikruthen, Kubikschuhe, Kubikzolle rc. ein gewisser Körper hat.

II. Zusatz: Der körperliche Inhalt des senkrechten Parallelepipedums wird gefunden, wenn man die Länge, Breite und Höhe desselben mit dem nämlichen Längenmaaße bestimmt, und diese Zahlen mit einander multiplizirt (Arithm. I. §. 57.), oder wie man sich der Kürze wegen gewöhnlich ausdrückt, wenn man die Länge, Breite und Höhe mit einander multiplizirt, oder auch, wenn man die Grundfläche mit der Höhe des senkrechten Parallelepipedums multiplizirt, indem das Produkt der Länge und Breite den Inhalt der Grundfläche angibt (I. §. 153. Zus. IV.), welche ein Rechteck ist (§. 18. b.).

III. Zusatz: Weil der Würfel oder Kubus ein senkrechtes Parallelepipedum ist (§. 18. c.), und bei ihm als einem regulären Körper (§. 3. e.) die Ausdehnung nach Länge, Breite und Höhe gleich groß ist, so erhält man den körperlichen Inhalt des Würfels, wenn man eine Seite mißt, und die Zahl, welche ihre Größe angibt, zur dritten Potenz oder zum Kubus erhebt (Arithm. III. §. 25. f.); drückt man demnach den Würfel durch C, und die Länge einer Seite desselben in Zahlen durch a aus, so ist der Würfel oder $C = a^3$.

IV. Zusatz: Aus dem bekannten Kubik-Inhalte des Würfels findet man dessen Seite, wenn man aus demselben die Kubikwurzel auszieht; denn $C = a^3$, also $a = \sqrt[3]{C}$ (Zus. III.).

V. Zusatz: Ein gegebener Kubus läßt sich verdoppeln. Drückt nämlich a die Länge einer Seite des

gegebenen Würfels aus, und x die Seite des doppelt so großen Kubus in Zahlen, so ist nach dem vorausgehenden III. Zusatze der erste Würfel $= a^3$, und der zweite $= x^3$, also $x^3 = 2a^3$, und $x = \sqrt[3]{2a^3}$ (Arithm. III. §. 70. 1.), mithin auch $x = a\sqrt[3]{2}$ (Arithm. III. §. 71. Zus. 1.), das heißt, wenn man die Seite des gegebenen Würfels mit der Kubikwurzel von 2 multiplizirt, so erhält man die Seite des doppelt so großen Würfels.

Anmerkung: 1) Im §. 81. des I. Theiles meines Lehrbuches der Arithmetik findet man ausführlich die in Baiern gesetzlich vorgeschriebenen Körper-Maaße mit Hinweisung auf das königl. Regierungsblatt angeführt, und den Kubikfuß nach dem Duodezimal- und Dezimal-Maaße in Tabellen abgetheilt.

2) Das Längenmaaß, mit dem man die drei Seiten des senkrechten Parallelepipedums mißt, ist allemal die Seite des Würfels, der den gesuchten Kubikinhalt desselben angibt; man kann die Messung mit jedem Längenmaaße vornehmen, oder die gemessenen Seiten beliebig auf jedes Längenmaaß reduziren. Hat man z. B. den Schuh oder den Zoll zum gemeinschaftlichen Längenmaaße angenommen, so gibt das erhaltene Produkt den gesuchten körperlichen Inhalt des Parallepipedums in Kubikschuhen oder Kubikzollen an.

3) Der im §. 35. aufgestellte Lehrsatz zeigt in Betreff der Messung der Körper, daß man ihren Kubikinhalt oder ihr Volumen dadurch bestimmt, daß man mittels der Längenmaaße gewisse Linien mißt, und die gefundenen Zahlen mit einander multiplizirt, weßhalb die Körper nicht unmittelbar mit Körpern, sondern nur durch gewisse Linien gemessen werden; indeß ist aber das Maaß des Körpers immer wieder ein Körper, und der körperliche oder Kubikinhalt kann nur durch Körper von bestimmter und bekannter Größe angegeben werden.

4) Der vorstehende V. Zusatz dieses §. enthält die Auflösung des sogenannten delphischen Problems. Der heidnische Apollo wurde um Abwendung der Pest von den Atheniensern angerufen; er versprach zu helfen, wenn man seinen Altar zu Delphi, der ein genauer Kubus war, verdoppeln, oder einen neuen Altar machen würde, der gerade noch einmal so groß, und doch, wie der vorige, wieder ein vollkommener Kubus wäre. Das Problem gab nun Griechenland allen seinen Weisen

auf, und wahrscheinlich brachten es die Geometer selbst den delphischen Priestern bei, damit der Ausspruch des Apollo desto eher die Gelehrten zur Auflösung desselben aufmuntern sollte. Man wollte die Auflösung mit einer mathematischen Zuverläßigkeit und nicht bloß mechanisch bewerkstelligen; da aber dieses den meisten zu schwer fiel, so blieb das Problem lange Zeit unaufgelöst.

5) Bei der Bestimmung des Kubikinhaltes der Körper nimmt man auch gewöhnlich, wie bei der Ausmessung der Linien und Flächen, das Dezimal-Maaß, welches in unserem Dezimal-Systeme zu den Reduktionen, und zur Angabe der kleineren Theile mittels der Dezimalbrüche bequemer ist.

Beim Längenmaaße wird bei der Dezimal-Eintheilung jedes Maaß in das nächst kleinere verwandelt, wenn man zur Rechten eine Null anhängt; daher (Arithm. I. §. 79.) sind z. B. 18 Ruthen = 180 Fuß = 1800 Zoll = 18000 Linien (Arithm. I. §. 90. A.), oder 18° = 180′ = 1800″ = 18000‴; und verschiedene Maaße werden in das kleinste von ihnen verwandelt, wenn man alle Ziffern als eine einzige Zahl ansieht, mithin sind z. B. 18° 4′ 5″ = 1845″, da 18° = 1800″, und 4′ = 40″, also 18° 4′ 5″ = 1800″ + 40″ + 5″ = 1845″. Und umgekehrt findet man (Arithm. I. §. 90. B.) die größeren Maaße, die ein kleineres enthält, wenn man über dieses jene Maaße nach der Ordnung der höheren Ziffern setzt, und jedem Maaße mit Ausnahme des höchsten ein Ziffer gibt; so sind z. B. 1845″ = 18° 4′ 5″ (I. §. 79. Anmerk. 2 und 3.).

Bei der Dezimal-Eintheilung wird jedes Flächenmaaß (Arithm. I. §. 80.) in das nächst kleinere verwandelt, wenn man zur Rechten zwei Nullen anhängt, und dasselbe wird vom Längenmaaße deutlich unterschieden, wenn man jedem kleineren Maaße zwei Zifferstellen gibt; deßhalb sind z. B. 46 Quadratruthen = 4600 Quadratfuß = 460000 Quadratzoll = 46000000 Quadratlinien, oder 46° = 4600′ = 460000″ = 46000000‴; und verschiedene Flächenmaaße, bei welchen die niederen allemal in zwei Zifferstellen ausgedrückt sind, werden in das kleinste von ihnen verwandelt, wenn man alle Ziffern als eine einzige Zahl ansieht; z. B. 6° 07′ 00″ 09‴ = 6070009‴; gleichwie man umgekehrt die größeren Flächenmaaße, die ein kleineres enthält, findet, wenn man ihre Zeichen von der Rechten zur Linken allemal nach zwei Ziffern setzt; weßhalb z. B. 6070009‴ = 6° 07′ 00″ 09‴ (I. §. 153. Anmerk. 3.).

Endlich wird im Dezimalmaaße ein körperliches Maaß (Arithm. I. §. 81.) in das nächst kleinere verwandelt, wenn ihm zur Rechten drei Nullen anhängt, und dasselbe wird vom Längen- und Flächenmaaße hinreichend unterschieden, wenn man jedem kleineren Maaße drei Zifferstellen gibt, und darnach, wie bei den anderen Maaßen, durch die beigefügten Zeichen die verschiedenen Maaße anzeigt; daher sind z. B. 6 Kubikruthen 8 Kubikfuß 44 Kubiklinien = 6° 008′ 000″ 044‴. Ferner werden verschiedene körperliche Maaße, bei welchen alle kleineren Maaße drei Zifferstellen haben, in das kleinste von ihnen verwandelt, wenn man alle Ziffern als eine einzige Zahl ansieht, und umgekehrt findet man die größeren Maaße, die ein kleineres enthält, wenn man ihre Zeichen von der Rechten zur Linken immer nach drei Ziffern setzt; deßhalb sind z. B. 6° 008′ 000″ 044‴ = 6008000044‴, und umgekehrt 6008000044‴ = 6° 008′ 000″ 044‴.

§. 37.

I. Aufgabe, den körperlichen Inhalt eines Prisma, oder eines Zylinders zu bestimmen.

Auflösung:

1) Man suche nach den in der Planimetrie im I. Theile aufgestellten Regeln den Flächeninhalt der Grundfläche;

2) Die Zahl, welche diesen Inhalt ausdrückt, multiplizire man mit der Höhe des Prisma, und das erhaltene Produkt gibt nach dem gebrauchten Maaße der gemessenen Linien den Kubikinhalt des Prisma, oder des Zylinders an.

Beweis:

1) Das Prisma hat zur Grundfläche eine ebene geradlinigte Figur (§. 6. a.), die sich vollkommen quadriren, oder in ein dem Flächeninhalte nach gleiches Quadrat verwandeln läßt, und der Zylinder hat zur Grundfläche einen Kreis, den man durch Annäherung in ein ihm gleiches Quadrat verwandeln kann (I. §. 154. Zus. I. und II.);

2) Mithin gibt das Produkt dieser Grundfläche in die Höhe den körperlichen Inhalt eines senkrechten Pa-

rallelepipedums (§. 36. Zus. II.), welches mit dem Prisma oder dem Zylinder gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat, also diesen Körpern gleich ist (§. 15. Zus. und §. 20.);

3) Daher gibt das Produkt der Grundfläche in die Höhe den körperlichen Inhalt des Prisma und des Zylinders an.

I. Zusatz: Wenn man den körperlichen Inhalt des Prisma oder des Zylinders mit der Höhe dividirt, so bekömmt man die Größe ihrer Grundflächen; theilt man aber den Kubikinhalt mit der Grundfläche, so erhält man die Höhe dieser Körper. Denn drückt B die Grundfläche, und A die Höhe des Prisma oder des Zylinders, und C ihren körperlichen Inhalt aus, so ist $C = B \,.\, A$, also $B = \frac{C}{A}$, und $A = \frac{C}{B}$ (Arithm. III. §. 98.).

II. Zusatz: Wenn R den Radius, dann D den Durchmesser der Grundfläche des Zylinders, und A die Höhe desselben ausdrückt, so ist der körperliche Inhalt des Zylinders oder $C = R^2\pi \,.\, A = \frac{1}{4} D^2\pi \,.\, A$, weil bei ihm die Grundfläche ein Kreis ist (§. 7. a und b.), also diese $= R^2\pi = \frac{1}{4} D^2\pi$ (I. §. 156. Zus. II.).

III. Zusatz: Aus dem bekannten Kubikinhalte, und der Höhe des Zylinders läßt sich der Radius oder Durchmesser seiner Grundfläche, und aus dessen Kubikinhalte und dem Radius oder Durchmesser seiner Grundfläche kann man seine Höhe berechnen. Denn es ist, wenn die Buchstaben C, R, D und A die vorhin angegebene Bedeutung haben, nach dem vorigen Zusatze der Zylinder, oder $C = R^2\pi \,.\, A$, und $C = \frac{1}{4} D^2\pi \,.\, A$, also ist $R = \sqrt{\frac{C}{\pi A}}$ und $D = \sqrt{\frac{4C}{\pi A}}$ (Arithm. IV. §. 20.), wie auch $A = \frac{C}{R^2\pi}$, und $A = \frac{4C}{D^2\pi}$ (Arithm. III. §. 98.).

IV. Zusatz: Wenn über zwei konzentrische Kreise (l. §. 111. a.) zwei Zylinder von gleicher Höhe A stehen, so ist nach dem vorausgehenden Zusatze der äußere oder größere Zylinder $C = R^2\pi . A$, und der innere oder kleinere Zylinder $c = r^2\pi . A$, also ist, wenn man Gleiches von Gleichem abzieht (Arithm. I. §. 34. I.), und die Produkte in Faktoren auflös't, der körperliche Inhalt des Zylindrischen Ringes, oder $C - c = R^2\pi . A - r^2\pi . A = A\pi (R^2 - r^2)$.

Anmerkung: Auch hier sieht man, daß man im Grunde nicht mit Flächen oder Linien multiplizirt oder dividirt, sondern daß alles auf einer Multiplikation oder Division mit blossen Zahlen beruht; aus diesem Grunde kann man auch kurz sagen, man erhalte den körperlichen Inhalt des Würfels oder des Prisma, wenn man die Seite des Würfels zum Kubus erhebt, oder die Grundfläche des Prisma mit seiner Höhe multiplizirt, und man erhalte die Grundfläche oder Höhe des Zylinders und Prisma, wenn man den Kubikinhalt mit der Höhe oder Grundfläche dividirt.

§. 38.

II. Aufgabe, die Oberfläche eines Prisma zu finden.

Auflösung:

1) Weil sowohl die Grundflächen, als auch die Seitenflächen des Prisma geradlinigte ebene Figuren sind (§. 6. a und b.), so bestimme man nach der Anleitung der Planimetrie den Flächeninhalt jeder dieser Figuren;

2) Man nehme die Summe dieser Figuren, und man erhält die ganze Oberfläche des Prisma (§. 2. a.).

I. Zusatz: Wenn a die Länge einer Seite des Würfels angibt, so bestimmt das sechsfache Quadrat von a, oder $6a^2$ die Oberfläche des Würfels (§. 18. c.).

II. Zusatz: Ist die Oberfläche des Würfels bekannt, und drückt man diese durch S aus, so ist nach dem vorigen Zusatze $S = 6a^2$, also $a = \sqrt{\frac{S}{6}}$ (Arithm.

IV. §. 20.); das heißt, aus der Oberfläche des Würfels läßt sich die Größe der Seite desselben berechnen.

§. 39.

II Lehrsatz:

Die krumme Seitenfläche eines senkrechten Zylinders ist einem Rechtecke gleich, welches die Peripherie der Grundfläche zu einer, und die Höhe des Zylinders zur anderen Seite hat.

Beweis:

1) Der Zylinder läßt sich als ein unendlich eckigtes Prisma (§. 20.), und deßhalb die krumme Seitenfläche desselben sich als die Summe von unendlich vielen Rechtecken betrachten (I. §. 50. b.);

2) Diese Rechtecke haben die Seite oder Höhe des Zylinders zu ihrer gemeinschaftlichen Höhe (§. 7. Zus. V.), und ihre Grundlinien machen zusammen die ganze Peripherie der Grundfläche des Zylinders aus;

3) Also sind alle diese Rechtecke zusammen, oder die ganze krumme Seitenfläche ist einem Rechtecke gleich, das die Summe ihrer Grundlinien oder die Peripherie der Grundfläche zur Grundlinie, und ihre gemeinschaftliche Höhe, oder die des Zylinders zur Höhe hat.

Zusatz: Wenn D den Durchmesser, dann R den Halbmesser, und A die Höhe oder Seite des senkrechten Zylinders bezeichnet, so ist die krumme Seitenfläche desselben $= D\pi . A = 2R\pi . A$ (I. §. 153. Zus. II.).

§. 40.

III. Aufgabe, die Oberfläche eines senkrechten Zylinders zu finden.

Auflösung:

1) Man bestimme den Flächeninhalt der beiden Grundflächen, welche gleiche Kreise sind (§. 7. a und b.); indem man den Flächeninhalt eines dieser Kreise be-

rechnet (I. §. 156. Zus. II.), und denselben mit der Zahl 2 multiplizirt;

2) Dann berechne man nach dem Zusatze des vorigen §. die krumme Seitenfläche des Zylinders, und es gibt die Summe der beiden Grundflächen und der Seitenfläche die ganze Oberfläche des Zylinders.

Zusatz: Wenn wieder D den Durchmesser, dann R den Radius der Grundfläche, und A die Höhe eines senkrechten Zylinders bezeichnet, so ist dessen ganze Oberfläche $= \frac{1}{4} D^2 \pi + \frac{1}{4} D^2 \pi + D \pi . A = \frac{1}{2} D^2 \pi + D \pi A = D \pi (\frac{1}{2} D + A) = 2 R \pi (R + A)$ da hier die Produkte in Faktoren aufgelös't werden (Arithm. III. §. 87. IV.).

II. Abschnitt.

Von der Pyramide und dem Kegel.

---

§. 41.

I. Aufgabe: den körperlichen Inhalt einer Pyramide oder eines Kegels zu bestimmen.

Auflösung:

1) Man bestimme den Inhalt der Grundfläche, und die Höhe;

2) Man multiplizire die Grundfläche mit der Höhe (§. 37. Anmerk.), und dividire das erhaltene Produkt mit der Zahl 3, und man bekömmt den Kubikinhalt der Pyramide oder des Kegels.

Beweis:

1) Das Produkt der Grundfläche in die Höhe gibt den körperlichen Inhalt eines Prisma oder eines Zylinders von der nämlichen Grundfläche und Höhe (§. 37.);

2) Die Pyramide und der Kegel sind der dritte Theil eines solchen Prisma oder Zylinders (§. 24. Zus. I. §. 26. Zus. VIII.).

3) Also gibt der dritte Theil vom Produkte der Grundfläche in die Höhe den körperlichen Inhalt der Pyramide oder des Kegels.

I. Zusatz: Drückt P den körperlichen Inhalt der Pyramide oder des Kegels aus, und bezeichnet B die Grundfläche und A die Höhe dieser Körper, so ist $P = \frac{B \cdot A}{3}$, also $B = \frac{3P}{A}$, und $A = \frac{3P}{B}$, das heißt, aus dem bekannten körperlichen Inhalte und der Grundfläche oder Höhe der Pyramide und des Kegels läßt sich die Höhe oder die Grundfläche dieser Körper berechnen.

II. Zusatz: Wenn R den Radius, dann D den Durchmesser der Grundfläche des Kegels, und A dessen Höhe ausdrückt, so ist der körperliche Inhalt des Kegels oder $C = \frac{1}{3} R^2 \pi \cdot A = \frac{1}{12} D^2 \pi \cdot A$, da bei ihm, wie beim Zylinder, die Grundfläche ein Kreis ist (§. 9. a und b.), also diese $= R^2 \pi = \frac{1}{4} D^2 \pi$ (I. §. 156. Zus. II.).

III. Zusatz: Aus dem bekannten Kubikinhalte des Kegels und der Höhe läßt sich der Radius oder Durchmesser seiner Grundfläche, und aus dessen Kubikinhalte und dem Radius oder Durchmesser seiner Grundfläche kann man seine Höhe berechnen. Denn es ist, wenn die angeführten Buchstaben die vorige Bedeutung haben, nach dem vorausgehenden Zusatze der Kegel $C = \frac{1}{3} R^2 \pi \cdot A$, und $C = \frac{1}{12} D^2 \pi \cdot A$, also ist $R = \sqrt{\frac{3C}{\pi A}}$, und $D = \sqrt{\frac{12C}{\pi A}}$, (Arithm. IV. §. 20.), wie auch $A = \frac{3C}{R^2 \pi}$, und $A = \frac{12C}{D^2 \pi}$ (Arithm. III. §. 98.).

§. 42.

II. Aufgabe, die Oberfläche einer Pyramide zu bestimmen.

Auflösung:

1) Weil die Grundfläche der Pyramide eine ebene geradlinigte Figur ist (§. 8. a und b.), und alle Sei-

tenflächen Dreiecke sind, so bestimme man nach den Vorschriften der Planimetrie den Inhalt der Grundfläche und aller Seitenflächen;

2) Man addire alle diese Flächen, und es gibt ihre Summe die ganze Oberfläche der Pyramide.

Zusatz: Ist bei einer gleichseitigen Pyramide die Grundfläche eine reguläre Figur, so sind alle Seitenflächen kongruent (I. §. 24.), und haben eine gleiche Höhe, wenn die Spitze der Pyramide als ihre Spitze angenommen wird; um deßwillen sind alle Seitenflächen zusammen dem halben Produkte aus dem Perimeter der Grundfläche in die Höhe einer Seitenfläche gleich (I. §. 151 und 156.). Drückt man den Perimeter der Grundfläche mit P, die Höhe einer Seitenfläche durch A, und die Entfernung einer Seite des Perimeters der Grundfläche von deren Mittelpunkte durch a aus (I. §. 126.), so ist die ganze Oberfläche einer solchen Pyramide $= \frac{P \,.\, A}{2} + \frac{P \,.\, a}{2} = \frac{1}{2} P$ $(A + a)$.

§. 43.

III. Lehrsatz:

Die krumme Seitenfläche eines gleichseitigen Kegels ist dem Flächeninhalte eines Dreieckes gleich, das zur Grundlinie die Peripherie der Grundfläche, und zur Höhe die Seite des Kegels hat.

Beweis:

1) Die krumme Seitenfläche eines Kegels kann man als die Summe unendlich vieler Dreiecke betrachten (§. 26.);

2) Weil der Kegel nach der Annahme gleichseitig ist, so ist die Seite desselben die gemeinschaftliche Höhe aller dieser Dreiecke, derer Grundlinien zusammen die Peripherie der Grundfläche ausmachen;

3) Folglich ist die krumme Seitenfläche als die Summe dieser Dreiecke einem Dreiecke gleich, das die

Seite des Kegels zur Höhe, und die Peripherie der Grundfläche zur Grundlinie hat (I. 143. Zus. II.).

I. Zusatz: Da im gleichseitigen Kegel alle Punkte der Peripherie der Grundfläche von der Spitze gleich weit abstehen, so kann man die krumme Seitenfläche des Kegels rücksichtlich ihrer Größe auch als einen Ausschnitt des Kreises annehmen, dessen Radius der Seite des Kegels, und dessen Bogen der Peripherie seiner Grundfläche gleich ist (I. §. 59. c. und §. 156. Zus. IV.).

II. Zusatz: Wenn A die Seite des gleichseitigen Kegels, dann d den Durchmesser und r den Halbmesser seiner Grundfläche bezeichnet, so ist die krumme Seitenfläche desselben $= d\pi \cdot \frac{1}{2} A = 2r\pi \cdot \frac{1}{2} A = r\pi \cdot A$ (I. §. 156.).

§. 44.

III. Aufgabe, die ganze Oberfläche eines gleichseitigen Kegels zu bestimmen.

Auflösung:

1) Man bestimme die Grundfläche (I. §. 156. Zus. II.), und nach dem II. Zusatze des vorigen §. die krumme Seitenfläche des Kegels;

2) Man addire diese beiden Flächen, und man erhält die ganze Oberfläche des Kegels.

Zusatz: Bezeichnet, wie vorhin, A die Seite des gleichseitigen oder senkrechten Kegels, dann d den Durchmesser und r den Radius seiner Grundfläche, so ist die ganze Oberfläche eines solchen Kegels $= r^2\pi + r\pi \cdot A = r\pi\,(r + A) = \frac{1}{4} d^2\pi + \frac{1}{2} d\pi \cdot A = \frac{1}{2} d\pi\,(\frac{1}{2} d + A)$, indem da wieder die Produkte in Faktoren aufgelöst werden (Arithm. III. §. 87. IV.).

Anmerkung: Betrachtet man den gleichseitigen Kegel als eine unendlicheckigte Pyramide, so kann man nach dem Zusatze des §. 42. dessen Oberfläche bestimmen, wenn man $2r\pi$ oder $d\pi$ anstatt P, und r anstatt a substituirt, man erhält dadurch anstatt $\frac{1}{2} P\,(A + a)$ auch die Formel $r\pi\,(A + r)$, oder $\frac{1}{2} d\,\pi\,(\frac{1}{2} d + A)$ zur Berechnung der Oberfläche des gleichseitigen Kegels.

§. 45.

IV. Aufgabe, den körperlichen Inhalt einer abgekürzten Pyramide zu bestimmen, wenn die beiden Grundflächen und ihre Entfernung gegeben sind.

Auflösung:

Der körperliche Inhalt der abgekürzten Pyramide ist dem Produkte des dritten Theiles der Höhe in die Summe der beiden Grundflächen und der Quadratwurzel des Produktes derselben gleich, oder es ist, wenn die obere Grundfläche durch b, die untere durch B, und die Höhe durch a ausgedrückt wird (§. 8. e.),

$$\text{Pyram. decurt.} = \tfrac{1}{3}a\,(B + b + \sqrt{Bb}).$$

Beweis:

1) Da (Fig. 15.) die beiden Grundflächen BD und GM, und die Höhe NK der abgekürzten Pyramide BM durch B, b und a ausgedrückt sind, so bezeichne man noch die Höhe AK der ganzen Pyramide durch A, und die Höhe AN der oberen weggeschnittenen Pyramide durch d;

2) Man erhält den körperlichen Inhalt der abgekürzten Pyramide, wenn man von der ganzen Pyramide die obere Pyramide subtrahirt, weßhalb (§. 41.)

$$\text{Pyram. dec.} = \tfrac{1}{3}AB - \tfrac{1}{3}db;$$

3) Weil bei der abgekürzten Pyramide die beiden Grundflächen parallel sind (§. 8. e.), so verhalten sie sich zu einander wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze der ganzen Pyramide (§. 22. B.), mithin

$$B : b = A^2 : d^2,$$

dann $\sqrt{B} : \sqrt{b} = A : d$ (Arithm. IV. §. 42.),

und $d = A\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B}}$ (Arithm. IV. §. 36.);

4) Man setze bei Nro. 2. anstatt d den hier gefundenen gleichen Werth; es ist

$$\text{Pyr. dec.} = \tfrac{1}{3}AB - \tfrac{1}{3}b \,.\, A\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B}}$$

$$= \frac{\tfrac{1}{3}AB\sqrt{B} - \tfrac{1}{3}Ab\sqrt{b}}{\sqrt{B}}$$ (Arithm. III. §. 67. Lehrs. II. Zus.),

$$= \tfrac{1}{3}A\left(\frac{B\sqrt{B} - b\sqrt{b}}{\sqrt{B}}\right)$$ (Arithm. III. §. 87. IV.);

5) Die ganze Höhe AK oder A ist gleich AN + NK = d + a, also a = A — d, und nach Nro. 3. ist $a = A - A\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B}}$, da man nämlich anstatt d den gleichen Werth setzt;

6) In dieser Gleichung suche man A (Arithm. III. §. 98.), es ist

$$a\sqrt{B} = A\sqrt{B} - A\sqrt{b},$$

dann $a\sqrt{B} = A(\sqrt{B} - \sqrt{b})$,

folglich $A = \frac{a\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}$;

7) Anstatt A setze man in der letzten Gleichung bei Nro. 4. den gleichen Werth; man findet, daß

$$\text{Pyr. dec.} = \tfrac{1}{3} \,.\, \frac{a\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}\left(\frac{B\sqrt{B} - b\sqrt{b}}{\sqrt{B}}\right)$$

$$= \tfrac{1}{3}a\left(\frac{B\sqrt{B} - b\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}\right),$$ wenn

man nämlich den Zähler und Nenner mit $\sqrt{B}$ dividirt (Arithm. III. §. 66. d.);

8) Diese Gleichung gibt schon der aufgestellten Aufgabe gemäß aus den gegebenen Grundflächen und ihrer Entfernung den gesuchten Kubikinhalt an; sie ist aber für die Anwendung unbequem; deßhalb gibt man ihr eine andere Form, indem man den Zähler und Nenner mit $\sqrt{B} + \sqrt{b}$ multiplizirt (Arithm. III. §. 66. d.); es ist

$(B\sqrt{B} - b\sqrt{b}) \times (\sqrt{B} + \sqrt{b}) = B\sqrt{B^2} - b\sqrt{Bb} + B\sqrt{Bb} - b\sqrt{b^2}$ (Arithm. III. §. 85.) $= B^2 - b^2 + (B - b)\sqrt{Bb} = (B + b)(B - b) + (B - b)\sqrt{Bb}$ (Arithm. III. §. 84. Anmerk. und §. 87. VI.);

9)

9) Eben so ist der Nenner
$(\sqrt{B} - \sqrt{b}) \times (\sqrt{B} + \sqrt{b}) = \sqrt{B^2} - \sqrt{Bb} + \sqrt{Bb} - \sqrt{b^2} = B - b$;

10) Setzt man endlich diese Werthe in der Gleichung bei Nro. 7, so ist

$$\text{Pyr. dec.} = \frac{1}{3} a \left(\frac{(B + b)(B - b) + (B - b)\sqrt{Bb}}{B - b} \right)$$

$= \frac{1}{3} a (B + b + \sqrt{Bb})$, da man nämlich den Bruch mit $B - b$ verkleinert (Arithm. III. §. 66. f.).

Man hat jetzt in einer bequemeren Formel aus den gegebenen Stücken den körperlichen Inhalt der abgekürzten Pyramide bestimmt, und dadurch die in der Auflösung angegebene Formel als richtig bewiesen.

§. 46.

V. **Aufgabe**, den körperlichen Inhalt des abgekürzten Kegels aus den gegebenen Radien der beiden Grundflächen und ihrer Entfernung oder der Höhe zu bestimmen.

Auflösung:

1) Den abgekürzten Kegel kann man als eine unendlicheckigte Pyramide betrachten (§. 26. Zus. IV.);

2) Die abgekürzte Pyramide, somit auch der abgekürzte Kegel ist nach der Auflösung des vorigen §., oder
Con. decurt. $= \frac{1}{3} a (B + b + \sqrt{Bb})$;

3) Beim abgekürzten Kegel sind die beiden Grundflächen Kreise (§. 26. Zus. I.), also ist $B = R^2 \pi$, dann $b = r^2 \pi$ (I. §. 156. Zus. II.), und $Bb = R^2 \pi \times r^2 \pi = R^2 r^2 \pi^2$, folglich $\sqrt{Bb} = \sqrt{(R^2 r^2 \pi^2)} = Rr\pi$ (Arithm. III. §. 71. Zus. I.);

4) Setzt man nun anstatt B, b und $\sqrt{Bb}$ die gleichen Werthe, und schreibt man den gemeinschaftlichen Faktor π wie $\frac{1}{3} a$ nur einmal im Produkte (Arithm. III. §. 87. IV.), so ist der abgekürzte Kegel oder

$$\text{Con. decurt.} = \frac{1}{3} a (R^2 \pi + r^2 \pi + Rr\pi)$$
$$= \frac{1}{3} \pi a (R^2 + r^2 + Rr),$$

welches aus den gegebenen Stücken den gesuchten körperlichen Inhalt des abgekürzten Kegels angibt.

§. 47.

VI. Aufgabe, aus den gegebenen Radien der beiden Grundflächen und einer Seite des abgekürzten gleichseitigen Kegels dessen Seitenfläche zu bestimmen.

Auflösung:

1) Es sei (Fig. 16.) im abgekürzten Kegel BN der Radius FM der oberen Grundfläche $= r$, dann der Radius BC der unteren Grundfläche $= R$, und die Seite $FB = e$, ferner bezeichne man die Seite AF des kleineren Kegels durch x, somit die ganze Seite AB durch $e + x$, weil sie $= BF + FA$, und man ziehe vom Punkte F auf die untere Grundfläche das Perpendikel FG (I. §. 173.), welches mit der Höhe AC des ganzen Kegels parallel ist (I. §. 172. A.);

2) Die Seitenfläche des ganzen Kegels BAE ist $= R\pi(e + x)$, dann die des kleineren Kegels FAN $= r\pi x$ (§. 43. Zus. II.), und die Seitenfläche des abgekürzten Kegels BN ist $= BAE - FAN = R\pi(e + x) - r\pi x$;

3) Weil nach Nro. 1. die Linie FG # AC, und FM # BC (I. §. 179. Zus. II.), so ist das Dreieck FBG ∽ △ ABC, und △ ABC ∽ △ AFM (I. §. 91.), also auch △ AFM ∽ FBG (I. §. 90. Zus. III.);

4) Daher verhält sich (I. §. 90. Zus. I.) $BG : BF = BC : BA$, mithin da $BG = BC - GC = BC - FM$ (I. §. 41. Zus. IV.) $= R - r$, $R - r : e = R : e + x$, also $e + x = \frac{Re}{R - r}$ (Arithm. IV. §. 36.), und die Seitenfläche $BAE = R\pi \times \frac{Re}{R - r}$ $= \frac{R^2 \pi e}{R - r}$;

5) Eben so verhält sich
BG : BF = FM : FA, mithin $R - r : e = r : x$, und $x = \frac{re}{R - r}$, weßhalb die Seitenfläche FAN $= r\pi \times \frac{re}{R - r} = \frac{r^2\pi . e}{R - r}$;

6) Die Seitenfläche BFNE des abgekürzten Kegels BN ist also auch $= \frac{R^2\pi . e}{R - r} - \frac{r^2\pi . e}{R - r}$ $= \frac{\pi e (R^2 - r^2)}{R - r} = \frac{\pi e (R + r)(R - r)}{R - r} = \pi e (R + r)$, das heißt, man erhält die Seitenfläche des abgekürzten gleichseitigen Kegels, wenn man seine Seite mit der Verhältnißzahl π, und der Summe der Radien der beiden Grundflächen multiplizirt.

Zusatz: Wenn beim abgekürzten gleichseitigen Kegel die obere Grundfläche der unteren sehr nahe liegt, und deßhalb ihre Entfernung oder die Höhe sehr klein ist, und gleich Null angenommen werden darf, so kann man die beiden Grundflächen als gleich betrachten (§. 26. Zus. V.), und der abgekürzte gleichseitige Kegel verwandelt sich in einen Zylinder von gleicher Grundfläche und Höhe, bei welchem somit $R = r$, und $R + r = 2R$, folglich die krumme Seitenfläche $= e\pi \times 2R = 2R\pi . e$, welches die krumme Seitenfläche des senkrechten Zylinders angibt (§. 39. Zus.).

Anmerkung: 1) Kann man nach den aufgestellten Formeln aus den gegebenen Stücken die Seitenfläche der ganzen Pyramide, und die der obern weggeschnittenen berechnen, so findet man die Seitenfläche der abgekürzten Pyramide, wenn man letztere von der ersteren subtrahirt; und auf eine ähnliche Weise findet man den Kubikinhalt der abgekürzten Pyramide, wenn der körperliche Inhalt der ganzen und der oberen kleineren Pyramide bekannt ist.

2) In den §§. 45 und 46. kommen die lateinischen Ausdrücke »Pyramis decurtata (abgekürzte Pyramide) und Conus decurtatus (abgekürzter Kegel)« mit einigen Abkürzungen vor.

III. Abschnitt.

Von der Kugel.

§. 48.

I. Lehrsatz:

Die Streife oder der Gürtel von der Oberfläche der Kugel zwischen zwei Parallelkreisen, die sehr nahe beisammen sind, kann als die Seitenfläche eines abgekürzten Kegels betrachtet werden, der diese Kreise zu Grundflächen, und ihre Entfernung zur Höhe hat.

Beweis:

1) Man denke sich (Fig. 25.) die beiden parallelen Kugelkreise BD und FH so nahe beisammen, daß ihre Entfernung, welche das Perpendikel PQ bestimmt, unbedeutend ist, und wie Null betrachtet werden kann;

2) Man denke sich ferner durch die Axe ES dieser Kugelkreise den Kugelschnitt LENS gelegt, der ein größter Kugelkreis ist (§. 28. Zus. II.);

3) In diesem ziehe man CD als Radius der Kugel, und durch D die Tangens DA (I. §. 75.), welche die verlängerte Axe SE in A, und den Durchmesser FH des um Q beschriebenen Parallelkreises in G schneidet (I. §. 40.);

4) Weil die Tangens AD auf den Radius DC senkrecht steht (I. §. 74. Zus. I.), so ist das Dreieck CDG rechtwinklicht (I. §. 29. c.), und der Winkel DCG, der den sehr kleinen Bogen DH wegen der geringen Entfernung der Parallelkreise von einander zum Maaße hat, ist sehr klein; je näher nun die Kreise an einander liegen, desto kleiner wird dieser Winkel, und desto mehr nähern sich die beiden übrigen Dreiecks-winkel der Summe von zwei rechten Winkeln, da der Winkel CGD sich mit der Verkleinerung von DCG einem rechten Winkel immer mehr nähert;

5) Sind nun die Parallelkreise so nahe beisammen, daß ihre Entfernung PQ, mithin auch der Bogen DH gleich Null gesetzt werden darf, so darf man auch annehmen, der Winkel DCG sei gleich Null (l. §. 63. Zus. II.), und also CGD = R, gleichwie CDG ein rechter Winkel ist; wenn aber dieses, so ist CG = CD (l. §. 23.), und G fällt auf einen Punkt der Peripherie, weßhalb der sehr kleine Bogen DH als ein Theil der Tangens AG zu betrachten ist;

6) Dreht sich nun der Halbkreis ENS um die Axe ES, so beschreibt er die Kugel (§. 27. Zus. II.), dann die Halbmesser PD und QG beschreiben zwei sehr nahe beisammen liegende Parallelkreise (l. §. 179. Zus. I.), und der Bogen DH beschreibt die Streife der Oberfläche der Kugel, die zwischen diesen Parallelkreisen enthalten ist (§. 28. Anmerk. 6.);

7) Dreht sich das rechtwinklichte Dreieck AQG um eben diese Axe, so beschreibt es einen gleichseitigen Kegel (§. 25. Zus. II.), und das Trapez QPDG beschreibt einen abgekürzten Kegel, und die Linie DG die Seitenfläche desselben;

8) Ist nun der Theil DG sehr klein, wie der entsprechende Bogen DH, so darf man die gerade Linie DG als gleich mit diesem Bogen annehmen, folglich läßt sich auch die sehr schmale Streife oder der Gürtel der Oberfläche der Kugel zwischen zwei sehr nahe beisammen liegenden parallelen Kugelkreisen (§. 28. Anmerk. 6.) als die Seitenfläche eines abgekürzten Kegels betrachten, der diese Kreise zu Grundflächen, und ihre Entfernung zur Höhe hat.

Anmerkung: 1) Diese Streife oder der Gürtel ist nach aller Schärfe der Seitenfläche eines solchen Kegels nicht gleich, er kömmt aber dieser um so näher, je näher die Parallelkreise beisammen liegen; nun kann man sich aber diese so nahe beisammen vorstellen, als man nur immer will, mithin auch so nahe, daß ihre Entfernung oder der Bogen DH ohne merklichen Fehler als Null und als einerlei mit dem eben so kleinen Theile DG der Tangens betrachtet werden kann;

2) Jede gegebene Größe ist eine endliche Größe, und kann somit weder unendlich groß noch unendlich klein sein; indem sich die unendliche Theilbarkeit

des Raumes nicht vollenden, und sich eine unendlich kleine Größe in der Anschauung nicht darstellen und geben läßt, und wir uns eine unendlich kleine Größe nur als solche denken, die sehr klein oder gänzlich verschwunden, also keine Größe mehr ist, und eine unendlich große Größe eine solche Größe ist, die größer ist, als jede Größe, die sich angeben oder bestimmen läßt.

In diesem Sinne rede ich von unendlich kleinen oder unendlich großen Größen, indem ich im I. Theile dieses Lehrbuches im §. 130. sage, daß unendlich kleine Sehnen von ihren Bögen unmerklich unterschieden sind, wie auch, daß der Kreis ein reguläres Vieleck mit unendlich vielen Seiten sei 2c. Aus diesem Grunde sage ich auch mehrentheils, um allem Irrthume auszuweichen, anstatt unendlich klein und unendlich groß, daß eine Größe sehr klein oder sehr groß sei, wie man es im I. Theile dieses Lehrbuches in den §§. 112, 113 2c. bemerken wird.

3) Auch ist daraus ersichtlich, daß (Fig. 25.) der Winkel DCG immer noch eine bestimmte Größe hat, man mag ihn so klein annehmen, als man will, mithin im strengen Sinne nie unendlich klein oder Null ist; deßwegen sind auch die beiden übrigen Dreieckswinkel nie ganz zwei rechten Winkeln gleich, was dem früheren Satze widersprechend wäre, nach welchem zwei Winkel eines Dreieckes allemal kleiner sein müssen, als zwei rechte Winkel (I. §. 28. Zus. II.).

§. 49.

II. Lehrsatz:

Ein Theil von der Oberfläche der Kugel, oder ein Segment der Kugel-Oberfläche, das durch einen Kugelkreis bestimmt wird, ist einem Rechtecke gleich, das die Peripherie eines größten Kugelkreises der nämlichen Kugel zur Grundlinie, und die Entfernung jenes Kugelkreises von seinem in diesem Segmente liegenden Pole zur Höhe hat.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 25.) BD der Kugelkreis, der die Kugel-Oberfläche in zwei Theile theilet, so daß davon BED das obere Segment ist (§. 28. Anmerk. 7.), und

durch die Pole E und S dieses Kreises sei der größte Kugelkreis LENS gelegt (§. 28. Zus. II.);

2) Sehr nahe zum Kreise BD sei der Kugelkreis FG mit ihm parallel, es läßt sich der sehr kleine Bogen DH als ein Theilchen der durch D gezogenen Tangens DA betrachten, und die zwischen beiden Parallelkreisen enthaltene Streife oder den Gürtel FBDH von der Oberfläche der Kugel kann man als die Seitenfläche eines abgekürzten Kegels annehmen (§. 48.);

3) Diese Zone oder Seitenfläche ist gleich dem Produkte aus der Peripherie der Grundfläche in die Seite des abgekürzten Kegels (§. 47. Zus.), also gleich dem Produkte aus der Peripherie des Kreises BD in den Bogen DH, oder Zona $= 2PD\pi \cdot DH$;

4) Man ziehe den Radius der Kugel CD, und durch D mit der Axe ES die Parallele DH, welche, wie die Axe (§. 29. Zus. IV.), auf beide Parallelkreise senkrecht steht (I. §. 172. B.), weßhalb PDH ein rechter Winkel ist (I. §. 169. a.), oder PDC + CDm = 90 Grad;

5) Weil die Tangens auf den Radius senkrecht steht (I. §. 74. Zus. I.), so ist CDG oder CDH auch ein rechter Winkel, und CDm + mDH = 90 Grad, mithin PDC + CDm = CDm + mDH (Arithm. I. §. 10. Nro. 4.), und, wenn man beiderseits CDm wegläßt, PDC = mDH;

6) Ferner ist der rechte Winkel CPD = DmH, und das Dreieck PDC ist dem Dreiecke mDH ähnlich (I. §. 92. Zus.), mithin verhält sich (I. §. 90. Zus. I.)

$$PD : CD = Dm : DH,$$

und $DH = \frac{CD \times Dm}{PD}$ (Arithm. IV. §. 36.);

7) Man substituire in der Formel bei Nro. 3., welche die Zone angibt, anstatt DH den hier gefundenen gleich Werth, setze r anstatt CD, und verkleinere den Bruch (Arithm. III. §. 66. d und e.), es ist die Streife, oder die Zone $= 2PD \cdot \pi \times \frac{CD \times Dm}{PD}$ $= 2\pi \cdot r \cdot Dm = 2r\pi \cdot Dm$;

8) Nun stelle man sich die Linie PE, welche die Entfernung des Kugelkreises BD von seinem Pole E bestimmt, in sehr viele und deßhalb sehr kleine Theile getheilt vor, so daß jeder Theil $= PQ = Dm$, und denke sich durch die Theilungspunkte mit dem Kreise BD Parallelkreise, die nach dieser Annahme der Ordnung nach, wie die Kreise BD und FG, sehr nahe beisammen liegen, es wird dadurch das kleinere Stück der Kugel-Oberfläche, das oberhalb BD liegt, in sehr viele und sehr schmale Streifen getheilt, die alle einander gleich sind, weil der Ausdruck $2r\pi$ beständig und für alle einerlei wegen der Gleichheit aller Radien der Kugel ist, und eben so $PQ = Dm$ für alle gleich angenommen wurde, so daß $PE = PQ + PQ + PQ + \ldots\ldots$;

9) Alle diese Streifen zusammen, oder das Stück BED der Kugel-Oberfläche ist also $= 2r\pi \,.\, Dm + 2r\pi \,.\, Dm + 2r\pi \,.\, Dm + \ldots\ldots = 2r\pi \,.\, PQ + 2r\pi \,.\, PQ + 2r\pi\, PQ + \ldots = 2r\pi\,(PQ + PQ + PQ + \ldots) = 2r\pi \,.\, PE$, welches den Flächeninhalt eines Rechteckes gibt, dessen Grundlinie $= 2r\pi$ also die Peripherie eines größten Kugelkreises (I. §. 133. Zus. I.), und dessen Höhe $= EP$, mithin die Entfernung des Kugelkreises BD von dem im Segmente BED liegenden Pole E ist (I. §. 152. Zus. IV.).

I. Zusatz: Die Oberfläche einer Halbkugel, oder die halbe Oberfläche der ganzen Kugel ist dem Flächeninhalte zweier größter Kreise der nämlichen Kugel gleich.

Denkt man sich (Fig. 25.) den größten Kugelkreis LN, so ist $CE = r$, und das Stück der Kugel-Oberfläche, oder die Oberfläche der Halbkugel LEN nach dem aufgestellten Lehrsatze $= 2r\pi \,.\, EC = 2r\pi \,.\, r = 2r^2\pi$, welches den Flächeninhalt zweier größter Kreise dieser Kugel ausdrückt (I. §. 156. Zus. II.).

II. Zusatz: Die ganze Oberfläche der Kugel ist die doppelte Oberfläche der Halbkugel, also $= 2r^2\pi$

$\times 2 = 4r^2\pi$, das ist, die ganze Kugel-Oberfläche ist vier größten Kreisen der nämlichen Kugel gleich.

III. Zusatz: Die Streife oder der Gürtel von der Oberfläche der Kugel zwischen zwei Parallelkreisen ist einem Rechtecke gleich, dessen Grundlinie die Peripherie eines größten Kreises dieser Kugel, und dessen Höhe die Entfernung dieser zwei Kreise von einander ist.

Hat man an der Oberfläche der Kugel (Fig. 25.) die beiden Parallelkreise LN und FH, die wie immer von einander entfernt sein dürfen, so ist nach dem Lehrsatze das Stück der Kugel-Oberfläche

$LEN = 2r\pi \cdot CE$,

und $FEH = 2r\pi \cdot EQ$,

also $LEN - FEH = 2r\pi \cdot CE - 2r\pi \cdot EQ = 2r\pi\,(CE - EQ) = 2r\pi \cdot CQ$.

Das ist, die Streife oder der Gürtel LFGN, welcher zwischen den zwei Parallelkreisen LN und FG an der Oberfläche der Kugel ist, ist gleich einem Rechtecke, das die Peripherie eines größten Kreises dieser Kugel zur Grundlinie, und die Entfernung dieser Kreise von einander, oder das Perpendikel CQ zur Höhe hat.

IV. Zusatz: Drückt man die Oberfläche der ganzen Kugel mittels des gegebenen Durchmessers aus, den man mit d bezeichnet, so ist sie $= d^2\pi$, indem sie vier größten Kreisen gleich ist, und der Flächeninhalt eines solchen Kreises $= \frac{1}{4} d^2\pi$ (I. §. 156. Zus. II.), oder weil $d = 2r$, also $d^2 = 4r^2$, folglich $4r^2\pi = d^2\pi$, welches die ganze Oberfläche der Kugel angibt.

V. Zusatz: Die Oberflächen zweier Kugeln verhalten sich zu einander wie die Quadrate ihrer Durchmesser oder ihrer Radien.

Bezeichnet man die beiden Oberflächen mit S und s, dann die Radien mit R und r, und die Durchmesser mit D und d, so ist nach den vorausgehenden Zusätzen

$$S = D^2\pi = 4R^2\pi,$$
und $s = d^2\pi = 4r^2\pi,$

also $S : s = D^2\pi : d^2\pi,$

und $S : s = 4R^2\pi : 4r^2\pi,$

mithin auch $S : s = D^2 : d^2$
und $S : s = R^2 : r^2$ } (Arithm. IV. §. 41.).

Anmerkung: 1) Unter der Oberfläche der Halbkugel versteht man hier nur ihre krumme Außenseite, und nicht auch zugleich die Begränzung durch die Ebene des größten Kugelkreises, der die ganze Oberfläche der Kugel in zwei Hälften theilt (§. 32. Zus. III.), derer jede die Oberfläche der Halbkugel ausmacht.

2) Weil die Parallelkreise nicht wirklich unendlich nahe beisammen sind, so daß ihre Entfernung unendlich klein ist, so sind in der Gleichung, welche nach der Seitenfläche des abgekürzten Kegels den Flächeninhalt der Streife oder des Gürtels zwischen ihnen ausdrückt, die beiden Ausdrücke nicht nach aller Schärfe einander gleich; man leitet aber daraus nach dem angegebenen Verfahren die vollständige Gleichung $BED = 2r\pi \,.\, PE$ ab, welche das Verhältniß der Größen genau bestimmt.

§. 50.

I. Aufgabe, den körperlichen Inhalt der Kugel aus dem Radius und dem Durchmesser zu bestimmen.

Auflösung:

Wenn d und r den Durchmesser und Halbmesser einer Kugel bezeichnen, so ist ihr körperlicher Inhalt, oder sphaera $= \frac{4}{3} r^3\pi = \frac{1}{6} d^3\pi$.

Beweis:

1) Die Kugel kann man als eine Pyramide betrachten, welche die Oberfläche der Kugel zur Grundfläche, und den Radius derselben zur Höhe hat (§. 33.); nun ist aber ihre Oberfläche $= 4r^2\pi$ (§. 49. Zus. II.), und ihre Radius $= r$, und der Kubikinhalt der Pyramide dem Drittel des Produktes der Grundfläche in

die Höhe gleich (§. 41.), also ist die Kugel oder sphaera $= 4r^2\pi \times \frac{1}{3}r = \frac{4}{3}r^3\pi$.

2) Der Radius der Kugel ist die Hälfte ihres Durchmessers (§. 10. Zus. II.), also $r = \frac{1}{2}d$, und $r^3 = \frac{1}{8}d^3$, setzt man nun in der Formel $\frac{4}{3}r^3\pi$ anstatt r^3 die gleiche Größe $\frac{1}{8}d^3$, so ist der Kubikinhalt der Kugel auch gleich $\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{8}d^3\pi$, oder sphaera $= \frac{1}{6}d^3\pi$.

I. Zusatz: Zwei Kugeln verhalten sich zu einander rücksichtlich ihres Kubikinhaltes wie die Kuben ihrer Radien oder Durchmesser.

Drückt man die Radien und die Durchmesser, wie vorhin, durch R und r, und durch D und d aus, so ist die erste Kugel oder Sphaera $= \frac{4}{3}R^3\pi = \frac{1}{6}D^3\pi$, und die andere Kugel oder sphaera $= \frac{4}{3}r^3\pi = \frac{1}{6}d^3\pi$, also verhält sich

$$\text{Sph.} : \text{sph.} = \frac{4}{3}R^3\pi : \frac{4}{3}r^3\pi = R^3 : r^3.$$

und $\text{Sph.} : \text{sph.} = \frac{1}{6}D^3\pi : \frac{1}{6}d^3\pi = D^3 : d^3$.

II. Zusatz: Aus dem bekannten Kubikinhalte oder Volumen der Kugel kann man ihren Radius, und ihren Durchmesser berechnen. Denn es ist sph. $= \frac{4}{3}r^3\pi$, also $r = \sqrt[3]{\frac{3\,\text{sph.}}{4\pi}}$, und sph. $= \frac{1}{6}d^3\pi$, mithin $d = \sqrt[3]{\frac{6\,\text{sph.}}{\pi}}$ (Arithm. IV. §. 22. Anmerk. 3.).

III. Zusatz: Weil der Kubikinhalt der ganzen Kugel $= \frac{4}{3}r^3\pi = \frac{1}{6}d^3\pi$, so ist der körperliche Inhalt der Halbkugel $= \frac{2}{3}r^3\pi = \frac{1}{12}d^3\pi$, und der vierte Theil des Kubikinhaltes der Kugel $= \frac{1}{3}r^3\pi = \frac{1}{24}d^3\pi$.

Anmerkung: 1) Man kann anstatt $\frac{4}{3}r^3\pi$ und $\frac{1}{6}d^3\pi$ die Formeln setzen $r^3 \times \frac{4}{3}\pi$, und $d^3 \times \frac{1}{6}\pi$, und eben so anstatt $\sqrt[3]{\frac{3\,\text{sph.}}{4\pi}}$ und $\sqrt[3]{\frac{6\,\text{sph.}}{\pi}}$ die Formeln $\sqrt[3]{\text{sph.}}$

$$\times \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} = \sqrt[3]{\text{sph.}} : \sqrt[3]{\frac{4\pi}{3}} \text{ und } \sqrt[3]{\text{sph.}} \times \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$$

$= \sqrt[3]{\text{sph.}} : \sqrt[3]{\frac{\pi}{6}}$, indem man die Produkte in Faktoren auflöst (Arithm. III. §. 86.), dann die Kubikwurzel aus jedem Faktor auszieht (Arithm. III. §. 71. Zus. I.), und mit dem umgekehrten zweiten Faktor dividirt (Arithm. III. §. 67. Lehrs. V. Zus. I.), um in einem Ausdrucke nebst den bestimmten Zahlen die Verhältnißzahl π zu erhalten.

2) Der Logarithmus $\sqrt[3]{\frac{\pi}{6}}$, oder Logar. $\sqrt[3]{\frac{\pi}{6}} =$ $0{,}9063329 - 1 = - 0{,}0936671$ und Log. $\sqrt[3]{\frac{4\pi}{3}} =$ $0{,}2073628$ (I. §. 132. Zus. I. c.).

§. 51.

II. Aufgabe, den Kubikinhalt eines Sektors und Segmentes der Kugel zu bestimmen.

Auflösung:

a) Wie man die ganze Kugel (§. 33.), eben so kann man den Sektor oder Ausschnitt der Kugel (§. 10. e.) als eine Pyramide betrachten, die das entsprechende Segment der Kugel-Oberfläche (§. 10. d.) zur Grundfläche, und den Radius der Kugel zur Höhe hat, wie dieses auf eine ähnliche Weise bei der Kreisfläche und dem Sektor des Kreises der Fall war I. §. 156. Zus. IV.); weßhalb der Kubikinhalt desselben dem dritten Theile des Produktes aus dem entsprechenden Segmente der Kugel-Oberfläche in den Radius der Kugel gleich ist.

Drückt man (Fig. 25.) die Entfernung PE des Kugelkreises BD von seinem Pole E, der im Segmente BED liegt, durch a aus, so ist der Flächeninhalt des Segmentes BED der Kugel-Oberfläche $=$ $2r\pi \,.\, a$ (§. 49.), folglich der Kubikinhalt des dazu gehörigen Kugel-Sektors BEDC $= 2r\pi a \times \frac{1}{3} r$ $= \frac{2}{3} r^2 \pi a$.

b) Wenn man vom Kugel-Sektor den entsprechenden Kegel, der seine Spitze im Mittelpunkte der Ku-

gel hat, subtrahirt, so erhält man den Kubikinhalt des dazu gehörigen Kugel-Segmentes oder Kugelabschnittes.

Ist (Fig. 25.) beim Kugel-Segmente BED das Perpendikel PE, wie der Radius der Kugel CE, bekannt, so ist es auch die Höhe CP des Kegels BCD, da sie oder CP = EC — PE; aus PC und CB kann man BP (I. §. 98.), und daraus den Flächeninhalt des Kugelkreises (I. §. 156. Zus. II.) berechnen, der dann mit dem dritten Theile von CP multiplizirt den Kubikinhalt dieses Kegels gibt.

Setzt man PE = a, und CE = r, so ist CP = r — a, also $CP^2 = r^2 - 2ar + a^2$ (Arithm. IV. §. 1.), und $BP^2 = CB^2 - CP^2 = r^2 - r^2 + 2ar - a^2 = 2ar - a^2$, also die Kreisfläche BD $= (2ar - a^2) \times \pi = 2ar\pi - a^2\pi$ (I. §. 156. Zus. II.), mithin der Kegel BCD $= (2ar\pi - a^2\pi) \times \frac{1}{3}(r - a) = \frac{2}{3}ar^2\pi - a^2r\pi + \frac{1}{3}a^3\pi$, und der Kugelabschnitt BED ist $= \frac{2}{3}r^2\pi a - \frac{2}{3}ar^2\pi + a^2r\pi - \frac{1}{3}a^3\pi = a^2r\pi - \frac{1}{3}a^3\pi$.

Anmerkung: 1) Wenn (Fig. 25.) anstatt der Entfernung PE des Kugelkreises BD vom Pole E seine Entfernung vom Zentrum der Kugel, welche = PC ist (I §. 173. Zus. II.) oder dafür der Radius BP dieses Kugelkreises bekannt ist, so kann man aus CE und CP das Perpendikel PE, und aus BP und CB das Perpendikel CP, und daraus wieder PE, mithin den Kugel-Sektor und das Kugel-Segment bestimmen, indem PE = CE — PC = r — PC, $CP = \sqrt{(CB^2 - BP^2)} = \sqrt{(r^2 - BP^2)}$ (I. §. 98.).

2) Soll man den Kubikinhalt der zwischen zwei Parallelkreisen enthaltenen Kugelzone berechnen, so bestimmt man den Kubikinhalt der beiden entsprechenden Kugel-Segmente, in welchen dieselbe liegt, und subtrahirt das kleinere Kugel-Segment vom größeren, der Rest gibt den Kubikinhalt der Kugelzone.

3) Ist der Kubikinhalt eines keilförmigen Ausschnittes (§. 32.), und der Flächeninhalt seiner an der Oberfläche der Kugel befindlichen Streife zu bestimmen, so berechne man aus dem bekannten Radius der Kugel ihren Kubikinhalt (§. 50.) und ihre Oberfläche (§. 49. Zus. II.), und daraus jene Stücke aus dem Verhältnisse, das der Neigungswinkel des Ausschnittes zur ganzen Peripherie eines Kreises hat, welche 360 Grad hält.

§. 52.

III. Lehrsatz:

Wenn ein Zylinder, dann eine Kugel und ein Kegel so beschaffen sind, daß ersterer und letzterer zur Grundfläche einen größten Kreis und zur Höhe den Durchmesser der nämlichen Kugel haben, so verhalten sie sich der Ordnung nach zu einander wie die Zahlen 3, dann 2 und 1.

Beweis:

1) Bezeichnet man den Zylinder mit C, die Kugel mit s, den Kegel mit c, und den Radius der Kugel mit r, so ist

$$C = B \cdot A \ (\S. 37.) = r^2\pi \cdot 2r = 2r^3\pi,$$

dann $s = 4r^2\pi \cdot \frac{1}{3}r = \frac{4}{3}r^3\pi$ (§. 50.),

und $c = B \cdot \frac{1}{3}A \ (\S. 41.) = r^2\pi \cdot \frac{1}{3}2r = \frac{2}{3}r^3\pi$.

2) Mithin verhält sich (Arithm. IV. §. 41.)

$$C : s = 2r^3\pi : \frac{4}{3}r^3\pi = 2 : \frac{4}{3} = 3 : 2,$$

dann $C : c = 2r^3\pi : \frac{2}{3}r^3\pi = 2 : \frac{2}{3} = 3 : 1$,

und $s : c = \frac{4}{3}r^3\pi : \frac{2}{3}r^3\pi = 2 : 1$.

Das ist, unter den angegebenen Bedingungen verhalten sich diese drei Körper in Absicht auf ihren Kubikinhalt, wie die Zahlen 3, dann 2 und 1; hat demnach z. B. der Zylinder 3 Kubikfuß, so hält die Kugel 2 Kubikfuß, und der Kegel 1 Kubikfuß.

§. 53.

III. **Aufgabe**, die Oberfläche und den körperlichen Inhalt der in §. 3. angeführten fünf regulären Körper zu bestimmen.

Auflösung:

1) Weil die regulären Körper zu ihrer Gränze lauter kongruente geradlinigte ebene Figuren haben (§. 3.), so findet man ihre ganze Oberfläche, wenn

man nach der Anweisung der Planimetrie den Flächeninhalt einer dieser Figuren bestimmt, und diesen mit der die Anzahl derselben bestimmenden Zahl multiplizirt. In Absicht auf das Hexarder oder den Würfel (§. 3. e.) findet man im I. Zusatze des §. 38. eine besondere Anweisung zur Bestimmung der Oberfläche desselben.

2) Der körperliche Inhalt der im §. 3. von b bis f aufgeführten fünf regulären Körper wird auf folgende Weise bestimmt:

a) Das Tetrarder (Fig. 2.) ist eine dreieckigte Pyramide, sein Kubikinhalt ist also gleich dem Produkte einer Seitenfläche als Grundfläche in den dritten der Höhe desselben (§. 41.).

b) Das Oktarder (Fig. 3.) läßt sich als die Summe zweier Pyramiden betrachten, welche das Quadrat ABCD zur gemeinschaftlichen Grundfläche haben; man bestimme deren Flächeninhalt (§. 153. Zus. V.), und multiplizire diesen mit dem Drittel der Höhe einer dieser Pyramiden, der gefundene Kubikinhalt, doppelt genommen oder mit 2 multiplizirt, gibt das Volumen des ganzen Oktarders.

c) Das Ikosarder (Fig. 4.) läßt sich als die Summe von zwanzig gleichen Pyramiden betrachten, die eine Seitenfläche zur Grundfläche, und die Entfernung der letzteren, oder die Dicke des halben Körpers zur Höhe haben; man bestimme demnach den Kubikinhalt einer dieser Pyramiden, und multiplizire ihn mit dem dritten Theil der Höhe, und das erhaltene Produkt mit der Zahl 20, um den körperlichen Inhalt des ganzen Oktarders zu erhalten.

d) In Betreff des Hexarders oder Würfels (Fig. 5.) ist die Formel zur Bestimmung des Kubikinhaltes im III. Zusatze des §. 36. angegeben.

e) Das Dodekarder (Fig. 6.) läßt sich als die Summe von zwölf gleichen Pyramiden betrachten, welche ein Fünfeck der Oberfläche zur Grundfläche, und deren Entfernung vom Mittelpunkte oder die Höhe des halben Körpers zur Höhe haben; man bestimmt deßhalb den Kubikinhalt einer dieser Pyramiden, und

multiplizirt ihn mit der Zahl 12, um den körperlichen Inhalt des ganzen Dodekarders zu finden.

§. 54.

IV. Aufgabe, den körperlichen Inhalt einer Afterpyramide zu bestimmen.

Auflösung:

Unter Afterpyramiden versteht man solche, die sich oben in keine Spitze, sondern in eine Schneide enden. Sie haben mit den Pyramiden (§. 8. a.) etwas Aehnliches, und heissen deßwegen Afterpyramiden. Die Figur 26. stellt eine solche vor, ihre Grundfläche ist, wie gewöhnlich, das Rechteck EAFD, und sie endet sich in der Schneide oder Kante BC.

Um ihren Kubikinhalt zu bestimmen, denke man sich von den beiden Endspunkten der oberen Kante BC zwei Ebenen mBo und pCr als Durchschnittsfiguren, welche unter sich parallel und auf die Grundfläche EF senkrecht sind. Das mittlere Stück mBorCp bildet ein dreieckigtes senkrechtes Prisma oC, bei dem man eine dieser Durchschnittsfiguren als Grundfläche annimmt, und deßhalb die Länge der Schneide oder Kante, somit BC die Höhe ist. Die beiden übrigen Theile AEomB und prDFC rückt man zusammen, und man erhält eine viereckigte Pyramide, welche den gemeinschaftlichen Punkt B oder C zur Spitze, und das Perpendikel von der Spitze auf die Grundfläche, nämlich Bn oder Cq zur Höhe hat.

Drückt man die Länge der Grundfläche, oder ED, durch B, die Breite AE = mo durch d, die Kante oder Schneide BC = or durch b, und die Höhe oder das Perpendikel Bn, das von der Spitze B auf die Grundfläche EF gezogen ist (l. §. 173.) durch a aus, so ist Eo + rD = B — b, indem Eo + rD = ED — or = ED — BC.

Das Dreieck mBo als Grundfläche des Prisma ist $= \frac{mo \times Bn}{2} = \frac{1}{2} d \cdot a$ (l. §. 156.), und die

Grund-

Grundfläche der Pyramide, welche die Flächenstücke AmoE und pFDr zusammen bilden, ist AE × (Eo + rD) = d (B — b) (I. §. 153. Zus. IV.), weßhalb nach §. 41. die Pyramide = d (B — b) × ⅓ a = ⅓ a . d (B — b), und das Prisma oC ist = △ mBo × BC = ½ a . d × b = ½ a . b . d (§. 37.).

Die Pyramide und das Prisma bilden zusammen die Afterpyramide, es ist demnach der Kubikinhalt derselben = ⅓ a . d (B — b) + ½ a . b . d = a . d $\left(\frac{1}{2}b + \frac{B - b}{3}\right)$ = a . d $\left(\frac{3b + 2B - 2b}{6}\right)$ = a . d $\left(\frac{2B + b}{6}\right)$, indem man die Produkte in Faktoren auflös'te, den Brüchen gleiche Nenner gab, und dann abkürzte.

I. Zusatz: Wenn die obere Schneide oder Kante in eine Spitze zusammenläuft, und also BC oder b gleich Null ist, so verwandelt sich die Afterpyramide in eine ächte Pyramide, welche das Rechteck EF zur Grundfläche, und das Perpendikel Bn zur Höhe hat. In dieser Voraussetzung, wenn nämlich b = o, verwandelt sich die Formel der Afterpyramide a . d $\left(\frac{2B + b}{6}\right)$ in die Formel a . d . $\frac{2B}{6}$ = ⅓ B . d . a = B . d × ⅓ a, welche den Kubikinhalt einer ächten Pyramide angibt (§. 41.).

II. Zusatz: Wenn BC = ED, also b = B, so erhält man einen keilförmigen Körper, der ein dreieckigtes Prisma wird, und die Dreiecke ABE und FCD zu Grundflächen hat; der Kubikinhalt desselben ist nach der vorigen Formel a . d $\left(\frac{2B + b}{6}\right)$ = a . d $\left(\frac{2B = B}{6}\right)$ = a . d . ³⁄₆ B = ½ a . d × B, welches den körperlichen Inhalt eines Prisma angibt (§. 37.).

§. 55.

Beispiele zur Uebung in der Berechnung der Oberflächen geometrischer Körper.

a) Wie groß ist die ganze Oberfläche eines Würfels, dessen Seite 24 Schuh 6 Zoll beträgt?

b) Wie groß ist die krumme Seitenfläche eines senkrechten Zylinders, wenn der Durchmesser seiner Grundfläche 6 Schuh 4 Zoll, und seine Höhe oder Seite 8 Schuh 2 Zoll beträgt?

c) Wie groß ist die Seitenfläche eines abgekürzten gleichseitigen Kegels, dessen Seite 8 Schuh hat und bei welchem der Radius der oberen Grundfläche 2 Schuh 5 Zoll, und der Halbmesser der unteren Grundfläche 3 Schuh 4 Zoll beträgt?

d) Wie groß ist die Oberfläche der Erdkugel, wenn der Durchmesser der Erde 1720, folglich ihr Halbmesser 860 deutsche Meilen beträgt?

Auflösung:

Wenn man bei den ersten drei Aufgaben das baierische Maaß, und die Dezimaleintheilung voraussetzt, so erhält man in baierischen Quadratschuhen folgende Resultate:

a) Nach dem 1. Zusatze des §. 38. ist die Oberfläche des Würfels $= 6a^2$, also in diesem Beispiele $= 6 \times (24{,}6)^2 = 3630{,}96$ □ Schuh = 3630 □ Schuh 96 □ Zoll (§. 36. Anmerk. 5.)

b) Nach dem Zusatze des §. 39. ist die Seitenfläche des senkrechten Zylinders $= D\pi \,.\, A$, also in diesem Beispiele $= 6{,}4 \times 3{,}1415 \times 8{,}2 = 164{,}865920$ □ Schuh, mithin beinahe = 164 □ Schuh 86 □ Zoll 59 □ Linien (Arithm. I. §. 80.).

c) Nach dem §. 47. ist die krumme Seitenfläche des abgekürzten gleichseitigen Kegels $= \pi \,.\, e\,(R + r)$, also in diesem Beispiele $= 3{,}1415 \times 8\,(3{,}4 + 2{,}5) = 148{,}27880$ □ Schuh = 148 □ Schuh 27 □ Quadratzoll 88 □ Linien.

d) Weil die ganze Oberfläche einer Kugel nach

dem IV. Zusatze des §. 49. gleich ist $4r^2\pi = d^2\pi$, und in diesem Beispiele $d = 1720$, also $r = 860$, so ist die Oberfläche der Erdkugel $= 4 \times 860^2 \times 3{,}1415 \ldots = 1720^2 \times 3{,}1415 \ldots = 9293813{,}6$, folglich beinahe 9'293.813 deutsche oder geographische Quadratmeilen.

Führt man die Rechnung mit Logarithmen aus, und nimmt man an, der Durchmesser der Erde halte 1718,9... oder 1718,87... deutsche Meilen (I. §. 133. Beisp. II.), so findet man, daß die Oberfläche der Erde beinahe 9'281.916 geographische Quadratmeilen hält; es ist nämlich die Oberfläche der Erde oder $S = d^2\pi$, also Log. $S = 2$ Log. $d +$ Log. π (Arithm. IV. §. 56 und 58.);

$$\begin{array}{rl} \text{Log. } d = & 3{,}2352439 \\ 2 = & 2 \\ \hline \text{also } 2 \text{ Log. } d = & 6{,}4704878 \\ \text{ferner Log. } \pi = & 0{,}4971499 \\ \hline \text{folglich Log. } S = & 6{,}9676377 = \text{Log. } 9'281.916. \end{array}$$

Anmerkung: 1) Wird zur Bestimmung der Erdoberfläche zuerst der Umfang der Erde = 5400 geograph. Meilen gegeben, so berechnet man den Durchmesser der Erde (I. §. 133. Beisp. II.), und nach diesem sucht man auf vorstehende Weise die Oberfläche der Erde, die man als eine Kugel betrachtet.

2) Ein anderes Resultat erhält man, wenn man nach den Lehrsätzen der höheren Geometrie dadurch die Oberfläche der Erde in geographischen Quadratmeilen bestimmt, daß man den Erdkörper als ein elliptisches Sphäroid annimmt, welches durch Umdrehung der Ellipse um die kleine Axe erzeugt wird.

§. 56.

Beispiele zur Uebung in der Berechnung des Kubikinhaltes geometrischer Körper.

a) Wie viele Kubikfuß beträgt das Volumen eines Würfels, dessen Seite 60 Schuh 5 Zoll hat, und welchen Raum nimmt ein Gebäude ein, das die Gestalt eines senkrechten Parallelepipedums hat (§. 36. Zus. II.),

und in der Länge 250 Schuh, in der Breite 180 Schuh, und in der Höhe 96 Fuß hält?

b) Welchen Kubikinhalt hat ein Kegel, wenn der Durchmesser der Grundfläche 6 Schuh 4 Zoll, und die Höhe desselben 4 Schuh 5 Zoll beträgt?

c) Wie groß ist der Kubikinhalt einer Afterpyramide, wenn ihre Länge 7, ihre Breite 3, dann die Länge der oberen Kante 4, und die Höhe 2 Schuh beträgt?

d) Wie viele Dezimal-Kubikzolle hält die baierische Maaßkanne, wenn sie die Gestalt eines Zylinders hat, dessen Höhe 6,969 Dezimalzoll, und bei dem der Durchmesser der Grundfläche 2,803 solche Zoll hat?

e) Wie viele Dezimal-Kubikzolle hält das baierische Getreidschäffel, da es die Gestalt eines abgekürzten Kegels hat (§. 46.), dessen Höhe 19 Zoll hält, und bei dem der Radius der unteren Grundfläche 17 Zoll, und der Halbmesser der oberen Grundfläche 14,5 Zoll beträgt?

f) Wie groß ist der Kubikinhalt der Erde (§. 50.), wenn der Umfang oder der Durchmesser derselben bekannt ist?

Auflösung:

a) Nach dem III. Zusatze des §. 36. ist der Kubikinhalt des Würfels oder $C = a^3$, mithin in dem bei a angegebenen Beispiele $= 60{,}5^3 = 221445{,}125$ Kubikschuh $=$ 221445 Kubikschuh 125 Kubikzoll, da der Kubikzoll der tausendste Theil des Kubikschuhes, also $^{125}/_{1000}$ Kubikfuß $=$ 125 Kubikzoll sind (Arithm. I. §. 81). Das Gebäude aber hält $250 \times 180 \times 96$ oder 4'320.000 Kubikschuh.

b) Nach dem II. Zusatze des §. 41. ist der Kegel oder $C = {}^1/_{12} D^2 \pi \,.\, A$, also in diesem Falle $= {}^1/_{12} \times 6{,}4^2 \times 3{,}1415\ldots \times 4{,}5 = 48{,}170106\ldots$ Kubikfuß, folglich beinahe $=$ 48 Kubikfuß 170 Kubikzoll 106 Kubiklinien.

c) Nach §. 54. ist der körperliche Inhalt der Afterpyramide $= a \,.\, d \left(\frac{2B + b}{6}\right)$; es ist aber im an-

gegebenen Beispiele ist $B = 7$, dann $b = 4$, ferner $d = 3$, und $a = 2$ Schuh, folglich ist die Afterpyramide $= 2 . 3 \left(\frac{2 . 7 + 4}{6}\right) = \frac{2 . 3 . 18}{6} = 18$ Kubikfuß.

d) Nach dem II. Zusatze des §. 37. ist der Zylinder oder $C = \frac{1}{4} D^2 \pi . A = D^2 . \frac{1}{4}\pi . A$; in diesem Beispiele ist $D = 2{,}803$ und $A = 6{,}969$ baier. Dezimalzoll, also

$$C = 2{,}803^2 \times \tfrac{1}{4}\pi \times 6{,}969$$

$$\begin{array}{lll}
\text{Log. } d = \text{Log. } 2{,}803 & = 0{,}4476231 & \\
\quad 2 = & \quad\quad 2 & \\
\hline
\text{Log. } d^2 = \text{Log. } 2{,}803^2 & = 0{,}8952462 & \\
\text{Log. } \tfrac{1}{4}\pi & = 0{,}8950899 & - 1 \\
\text{Log. } A = \text{Log. } 6{,}969 & = 0{,}8431706 & \\
\hline
\end{array}$$

mithin $\text{Log. } C = 1{,}6335066 = \text{Log. } 43{,}0036\ldots$

Es hält also die baierische Maaßkanne beinahe 43,0036 baierische Dezimal-Kubikzoll.

e) Nach §. 46. ist der abgekürzte Kegel oder Conus decurtatus $= \frac{1}{3}\pi . a (R^2 + r^2 + Rr)$, mithin ist das baierische Getreidschäffel $= \frac{1}{3}\pi \times 19 \times (17^2 + 14{,}5^2 + 17 \times 14{,}5)$.

Weil $R = 17''$, und $r = 14{,}5''$, so ist $R^2 = 289''$, dann $r^2 = 210{,}25''$, und $Rr = 246{,}5''$, folglich $R^2 + r^2 + Rr = 745{,}75''$.

$$\begin{array}{ll}
\text{Log. } \tfrac{1}{3}\pi & = 0{,}0200286 \\
\text{Log. } 19 & = 1{,}2787536 \\
\text{Log. } 745{,}75 & = 2{,}8725933 \\
\hline
 & \;\; 4{,}1713755 = \text{Log. } 14838
\end{array}$$

Der körperliche Inhalt des baierischen Getreidschäffels, welches ein abgekürzter Kegel ist, beträgt demnach 14838 baier. Kubikzoll, da die Radien und die Höhe in Zollen angegeben wurden.

f) Wenn zur Bestimmung des Kubikinhaltes der Erdkugel der Umfang der Erde, welcher 5400 geographische Meilen beträgt, gegeben ist, so berechnet man zuerst den Durchmesser der Erde (I. §. 133. Beisp. II.).

Nach §. 50. ist die Kugel oder Sphaera $= \frac{4}{3} r^3 \pi$ $= \frac{1}{6} d^3 \pi = \frac{1}{6} \pi . d^3$, daher ist die Erdkugel $= \frac{1}{6} . 3{,}1415 \ldots \times 1718{,}87^3 \ldots$

$$\text{Log. } d = 3{,}2352439$$
$$3 = 3$$
$$\text{also Log. } d^3 = 3. \text{ Log. } d = 9{,}7057317$$
$$\text{Log. } \tfrac{1}{6}\pi = 0{,}7189986 - 1$$
$$\text{mithin Log. Sph.} = 9{,}4247303.$$

Die Zahl 9,4247303 ist aber der Logarithmus von 2.659'073.061.

Es hält demnach der Erdkörper über 2659 Millionen geographische Kubikmeilen.

Anmerkung: 1) Bei größeren Zahlen ist die Rechnung mit Logarithmen einfacher und bequemer, als die gewöhnliche Rechnung nach den Regeln der gemeinen Arithmetik (Arithm. I. §. 63. Anmerk. 3.); wie dieses aus den beiden im §. 55. bei d. angeführten Auflösungen ersichtlich ist.

2) Bei der Berechnung der Oberfläche und des Kubikinhaltes der Erdkugel erhält man sowohl wegen der verschiedenen Größe des Durchmessers derselben, den man = 1720, oder = 1718,9 ..., oder = 1718,87 .... rc. setzt (I. §. 133. Beisp. II und Anmerk.), als auch deßwegen verschiedene Resultate, weil die Rechnung auf dem Verhältnisse des Diameters zur Peripherie beruht, und dieses nicht genau bestimmt ist (I. §. 132.).

3) Den körperlichen Inhalt eines Fasses kann man nach den bisher aufgestellten Lehrsätzen dadurch ziemlich genau bestimmen, daß man jede Hälfte desselben als einen abgekürzten Kegel betrachtet, dann ihren Kubikinhalt nach der im §. 46. aufgestellten Formel berechnet, und diebeiden abgekürzten Kegel addirt, welche zur einen Grundfläche die Kreisfläche beim Spund, und zur anderen jedesmal den Faßboden haben. Hiebei ist die halbe Faßlänge die Höhe eines der abgekürzten Kegel.

4) Mechanisch lassen sich Körper durch Wasser oder durch Sand ausmessen, indem man sie mit Wasser oder mit Sand anfüllt, oder in regelmäßige Gefäße legt, und dann durch Messung die Größe des Raumes bestimmt, den dieselben einnehmen.

Auf eine ähnliche Weise findet man den Kubikinhalt der Körper durch Gewicht, da man annimmt, daß sich die Kubikinhalte der Körper von einerlei Materie, wie ihre Gewichte verhalten.

Ebene Trigonometrie.

Einleitung.

Vom Gegenstande der Trigonometrie.

§. 57.

Sinus und Quersinus eines Bogens oder Winkels.

a) Wenn man an dem einen Endspunkte eines Kreisbogens einen Radius zieht, und von diesem Punkte auf den durch den anderen Endspunkt gezogenen Durchmesser ein Perpendikel fällt, so nennt man dieses den Sinus des Bogens, oder des dem Bogen entsprechenden Winkels.

b) Der Theil des Durchmessers, welcher zwischen dem Anfangspunkte des Bogens, und zwischen dem Sinus liegt, heißt der Quersinus (Sinus versus) des Bogens oder des entsprechenden Winkels.

Hat man (Fig. 27.) den Kreisbogen BC, und man zieht von dessen Endspunkte C den Radius CA, und zugleich auf den durch den Endspunkt B gezogenen Durchmesser BN das Perpendikel CE, so ist dieses der Sinus, und das Stück BE des Diameters, welches zwischen dem Punkte B und dem Sinus CE liegt, ist der Quersinus des Bogens BC, oder des ihm entsprechenden Winkels BAC.

I. Zusatz: Für den Bogen BGM (Fig. 27.) und dem entsprechenden stumpfen Winkel BAM ist MZ der Sinus, und BZ der Quersinus; zu dem Bogen BGNQ und dem entsprechenden erhabenen Winkel BAQ gehört QZ als Sinus und BZ als Quersinus; und endlich zu dem Bogen BGNSU und dem entsprechenden erhabenen Winkel BAU ist UE der Sinus und BE der Quersinus.

II. Zusatz: Beim spitzigen Winkel fällt der Sinus innerhalb, und beim stumpfen Winkel außerhalb des

Winkels auf die Verlängerung des anderen Schenkels, während er beim rechten Winkel mit einem Schenkel zusammenfällt (I. §. 33. Zus. VIII.); wie dieses (Fig. 27.) bei den Winkeln BAC, BAM und BAG der Fall ist, zu welchen die Perpendikel CE, MZ und GA die Sinus sind.

Anmerkung. Soll man für einen gegebenen Winkel den Sinus und den Quersinus verzeichnen, so beschreibt man mit dem gegebenen Radius, oder, wenn keiner gegeben ist, mit einem beliebigen Halbmesser vom Scheitel des Winkels aus einen Kreisbogen, der das Maaß des Winkels ist (I. §. 65. Zus. II.), und bestimmt dann nach den bei a und b aufgestellten Begriffen die beiden genannten Linien.

§. 58.

Tangens oder Sekans eines Bogens oder Winkels.

a) Wenn man an dem einen Endspunkte eines Kreisbogens eine Tangens des Kreises errichtet (I. §. 75.), und durch den anderen Endspunkt den gezogenen Radius nach einer Seite so verlängert, bis er mit der Tangens zusammenstoßt, so heißt der bestimmte Theil von der Tangens des Kreises die Tangens des Bogens oder entsprechenden Winkels, und

b) die gerade Linie vom Zentrum des Kreises an bis zum Durchschnittspunkte mit der Tangens die Sekans des nämlichen Bogens oder Winkels.

Auf diese Weise ist (Fig. 27.) die Linie BD die Tangens und AD die Sekans des Bogens BC oder des spitzigen Winkels BAC.

I. Zusatz: Für den Bogen BGM und den entsprechenden stumpfen Winkel BAM ist BT die Tangens und AT die Sekans; zu dem Bogen BGNQ und dem entsprechenden erhabenen Winkel BAQ ist BD die Tangens und AD die Sekans; und endlich für den Bogen BGNSU und dem erhabenen Winkel BAU ist BT die Tangens und AT die Sekans.

II. Zusatz: Beim spitzigen Winkel konvergirt die Tangens mit der Sekans auf der Seite des Bogens oder Winkels (I. §. 37. a.), und beim stumpfen Win-

kel divergiren sie auf dieser Seite, und stossen auf der entgegengesetzten Seite zusammen, wie dieses (Fig. 27.) bei den Winkeln BAC und BAM ersichtlich ist, indem die Winkel DBA + BAC < 180 Grad, und die Winkel DBA + BAM > 180 Grad (I. §. 40. Zus. I.).

III. Zusatz: Beim erhabenen Winkel im dritten Quadranten stoßt die Tangens mit der Sekans auf der Seite des Bogens oder Winkels zusammen, und beim Winkel im vierten Quadranten findet wieder das Gegentheil Statt.

IV. Zusatz: Hält der Bogen oder Winkel 90 oder 270 Grad, so ist die Tangens mit der Sekans parallel (I. §. 38.); diese Linien stossen dann nie zusammen (I. §. 37. b.), und geben deßhalb auch einander keine bestimmte Größe.

§. 59.

Die Ergänzung oder das Komplement eines Bogens oder Winkels.

Ist ein Winkel oder Bogen kleiner als 180 Grad, so heißt jener spitzige Winkel oder Bogen die Ergänzung oder das Komplement, der, zum gegebenen Winkel addirt oder davon subtrahirt, 90 Grad gibt; und ist ein Winkel oder Bogen größer als 180 Grad, und deßhalb erhaben im dritten oder vierten Quadranten, so ist jener spitzige Winkel oder Bogen das Komplement, der, zum gegebenen Winkel addirt, oder davon subtrahirt, 270 Grad gibt.

Deßhalb ist (Fig. 27.) zu dem Bogen BC oder dem spitzigen Winkel BAC der Bogen CG oder der Winkel CAG das Komplement; eben so ist GM oder GAM zu BGM oder BAM, dann QS oder SAQ zu BGNQ oder BAQ, und SU oder SAU zu BGNSU oder BAU das Komplement.

I. Zusatz: Ist der Winkel spitzig, so erhält man das Komplement, wenn man den gegebenen Winkel von 90 Grad subtrahirt. Denn wenn A den Winkel und C das Komplement bezeichnet, so ist nach dem

aufgestellten Begriffe $A + C = 90^{\circ}$, also $C = 90^{\circ} - A$; hat demnach z. B. der Winkel 60°, so hält sein Komplement 30 Grad.

II. Zusatz: Ist der Winkel stumpf, so erhält man das Komplement, wenn man von ihm 90 Grad subtrahiert; da in diesem Falle $A - C = 90^{\circ}$, also $C = A - 90^{\circ}$. Aus diesem Grunde beträgt z. B. das Komplement 30 Grad, wenn der gegebene Winkel 120 Grad hält.

III. Zusatz: Beim erhabenen Winkel im dritten Quadranten erhält man das Komplement, wenn man den gegebenen Winkel von 270 Grad abzieht, indem $A + C = 270^{\circ}$, mithin $C = 270^{\circ} - A$. Hat daher z. B. der gegebene Winkel 200°, so beträgt sein Komplement 70 Grad.

IV. Zusatz: Endlich erhält man beim erhabenen Winkel im vierten Quadranten das Komplement, wenn man 270 Grad von ihm abzieht, weil in diesem Falle $A - C = 270^{\circ}$, folglich $C = A - 270^{\circ}$. Deßwegen beträgt z. B. das Komplement 30 Grad, wenn der gegebene Winkel 300 Grad hat.

Anmerkung: Was in diesen Zusätzen von den Winkeln gesagt wurde, gilt auf die nämliche Weise von den Kreisbögen, durch welche die Größe der Winkel in Graden, Minuten bestimmt wird (I. §. 63. Zus. II.).

§. 60.

Kosinus, Kotangens und Kosekans eines Winkels oder Bogens.

Den Sinus, die Tangens und die Sekans vom Komplemente eines Winkels oder Bogens, heißt man den Kosinus, die Kotangens und die Kosekans dieses Winkels oder Bogens.

Ist (Fig. 27.) der spitzige Winkel BAC gegeben, so ist, wenn BAC + CAG = 90 Grad, der spitzige Winkel CAG zu BAC das Komplement; zu diesem ist CK der Sinus, GF die Tangens, und AF die Sekans, folglich ist zum spitzigen Winkel BAC die Linie CK der Kosinus, ferner GF die Kotangens, und AF die Kosekans.

Anmerkung: 1) Die bisher angeführten sieben Linien, als Sinus, Tangens, Sekans, Quersinus, Kosinus, Kotangens und Kosekans werden, wenn zum Beispiele (Fig. 27.) der Winkel BAC gegeben ist, auf diese Weise kürzer geschrieben: CE = Sin. BAC, BD = Tang. BAC, AD = Sec. BAC, BE = Sinv. BAC, CK = Cosin. BAC, GF = Cot. BAC, und AF = Cosec. BAC, und eben so rücksichtlich der Bögen, als CE = Sin. BC, dann BD = Tang BC 2c., anstatt daß man schreibt: CE ist der Sinus des Winkels BAC, dann BD ist dessen Tangens 2c.

2) Bei der Abkürzung schreibe ich, wie man es gewöhnlich in den mathematischen Werken findet, die Namen dieser Linien mit lateinischen Buchstaben, und deßhalb Sinus oder Sin. anstatt Sinus, Cosinus oder Cosin. anstatt Kosinus, Tangens oder Tang. anstatt Tangens, Cotangens oder Cot. anstatt Kotangens, Secans oder Sec. anstatt Sekans, Cosecans oder Cosec. anstatt Kosekans, und Sinus versus oder Sinv. anstatt Quersinus.

§. 61.

Trigonometrie — ebene und sphärische.

a) Die Wissenschaft, aus drei gegebenen Stücken eines Dreieckes, wodurch dasselbe bestimmt wird, die übrigen Stücke durch die Rechnung zu finden, heißt **Trigonometrie** (Arithm. I. §. 6.).

b) Wenn aus drei gegebenen Stücken eines geradlinigten ebenen Dreieckes, unter welchen wenigstens eine Seite sein muß, die übrigen drei Stücke durch Rechnung bestimmt werden, so nennt man es die **ebene Trigonometrie** oder **Plantrigonometrie** (Trigonometria plana).

c) Werden aus drei gegebenen Stücken eines sphärischen oder Kugeldreieckes (§. 34. e.) die übrigen durch Rechnung bestimmt; so nennt man die Trigonometrie die **sphärische Trigonometrie** (Trigonometria sphaerica).

Anmerkung: 1) In der sphärischen Trigonometrie, wo die Seiten der Dreiecke Bögen größter Kreise sind, und wie die Winkel gemessen werden, dürfen die gegebenen Stücke Seiten, oder Winkel, oder theils Seiten theils Winkel sein; dagegen dürfen aber in der ebenen Trigonometrie die unbekannten Stücke nicht lauter Win-

kel sein, da diese allein das geradlinigte ebene Dreieck nicht bestimmen, und bei gleichen Winkeln die Dreiecke nur ähnlich, aber nicht kongruent sind, wenn sie nicht auch zugleich wenigstens eine Seite gleich haben.

2) Wenn gleich in der Longimetrie (I. §. 30.) bewiesen ist, daß im geradlinigten ebenen Dreiecke der größeren Seite der größere Winkel gegenüber steht, so folgt daraus doch nicht, daß die Seiten mit ihren opponirten Winkeln im geraden Verhältnisse stehen (Arithm. II. §. 58. a.), und deßhalb mit diesen gerade proportionirt sind, wie man dieses aus Nachstehendem ersieht.

Es sei (Fig. 34.) das Dreieck ABC gleichseitig, und man ziehe von B auf AC das Perpendikel BD, so ist nach den im I. Theile dieses Lehrbuches aufgestellten Lehrsätzen $AD = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} AB$, und der Winkel $p = \frac{1}{2} B = 30$ Grad, während der Winkel $m = 90$ Grad ist. Würde nun jenes Verhältniß Statt finden, so verhielte sich $AB : AD = m : p$, also $AB : AD = 90^\circ : 30^\circ$, und $AB : \frac{1}{2} AB = 90^\circ : 30^\circ$, das ist, $2 : 1 = 3 : 1$, was offenbar nicht sein kann.

3) Weil auf diese Weise zwischen den Seiten und Winkeln kein bestimmtes Verhältniß Statt findet, so hat man die erwähnten Linien, den Sinus, Kosinus, Tangens, Kotangens rc. eingeführt, um durch sie aus den gegebenen Stücken eines Dreieckes die unbekannten durch Rechnung zu finden; deßwegen nennt man diese Hilfslinien **trigonometrische Linien**, oder **trigonometrische Funktionen**.

I. Hauptstück.

Von den Verhältnissen trigonometrischer Linien.

I. Abschnitt.

Von den Verhältnissen trigonometrischer Linien einfacher Bögen und Winkel.

§. 62.

I. Lehrsatz:

Zwei gleiche spitzige Winkel haben gleiche Sinus.

1) Es seien (Fig. 27.) die spitzigen Winkel BAC und MAN einander gleich, und CE und MZ ihre Sinus:

2) Da nach dieser Voraussetzung der Winkel BAC = MAN, dann der Winkel E = Z = 90 Grad, und der Radius AC = AM, so ist das Dreieck CEA ∽ △ MAZ (I. §. 44.), und CE = MZ, oder Sin. BAC = Sin. NAM, das ist, gleiche spitzige Winkel haben gleiche Sinus.

I. Zusatz: Der Sinus eines spitzigen Winkels ist der halben Sehne seines doppelten Bogens gleich; denn wenn man den Sinus CE bis zur Peripherie an der anderen Seite des Kreises verlängert, und vom Durchschnittspunkte U den Radius UA zieht, so ist das Dreieck CAU, da AC = AU, gleichschenklicht, und AE oder AB steht auf CU senkrecht (§. 57. a.), weßhalb (I. §. 36. Zus. II.) der Sinus CE = ½ CU, wie auch der Winkel CAB = BAU, dann der Bogen BC = arc. BU, mithin arc. BC = ½ arc. CBU; nun gehört aber die Sehne CU zum Bogen CBU, mithin ist der Sinus CE des spitzigen Winkels BAC der halben Sehne seines doppelt großen Bogens gleich.

II. Zusatz: Der Sinus eines Winkels von 30 Grad ist dem halben Radius des Kreises gleich. Denn nach dem vorigen Zusatze ist der Sinus eines Winkels

von 30 Grad der halben Sehne eines Bogens von 60 Grad gleich, die Sehne dieses letzteren Bogens ist aber dem Radius gleich (I. §. 65.), folglich ist Sin. 30° = ½ r.

Setzt man den Radius des Kreises, für welchen der Sinus eines solchen Winkels konstruirt ist, gleich der Zahl 1, so ist Sin. 30° = ½ = 0,5.

III. Zusatz: Der stumpfe Winkel hat mit seinem spitzigen Nebenwinkel den nämlichen Sinus. Ist (Fig. 27.) der stumpfe Winkel BAM gegeben, zu welchem MAN sein spitziger Nebenwinkel ist, so ist das Perpendikel MZ der Sinus für beide Winkel zugleich, da sich vom Endspunkte M ihrer Bögen nur dieses einzige Perpendikel auf den Durchmesser BN fällen läßt (I. §. 33. Zus. I.).

Anmerkung: 1) Das hier Gesagte gilt eben so von den Kreisbögen, welche den Zentriwinkeln entsprechen, da sie das Maaß der Winkel sind, und die Zentriwinkel, wie ihre Bögen, durch Grade, Minuten rc. gemessen werden. Dieses wird auch für die folgenden Sätze bemerkt, die rücksichtlich der trigonometrischen Linien aufgestellt werden, und bei welchen nur von den Winkeln, und nicht auch zugleich von ihren Bögen Erwähnung geschieht.

2) Wenn man behauptet, daß zu gleichen spitzigen Winkeln gleiche Sinus gehören, so ist es so zu verstehen, daß diese Winkel, und deßhalb auch ihre Sinus in einem und demselben Kreise sind.

§. 63.

II. Lehrsatz:

Der Sinus eines spitzigen Winkels an der Peripherie ist der halben Sehne seines Bogens gleich.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 27.) der spitzige Peripheriewinkel CUM gegeben, und CM sei die Sehne des zu ihm gehörigen Bogens CGM;

2) Zu diesem Winkel ist CAM der entsprechende Zentriwinkel (I. §. 59. a.), und dieser ist doppelt so

groß, als sein Peripheriewinkel (I. §. 71.), weßhalb CUM = ½ CAM;

3) Zieht man im gleichschenklichten Dreiecke CAM von A aus auf CM das Perpendikel AG, so wird CK der Sinus des Winkels CAG (§. 57. a.), und CAG = ½ CAM (I. §. 36. Zus. II.) und deßwegen ist CAG auch = CUM;

4) Nach dem ersten Lehrsatze (§. 62.) gehören zu gleichen spitzigen Winkeln gleiche Sinus, folglich ist Sin. CUM = Sin. CAG = CK = ½ CM, das heißt, der Sinus eines spitzigen Peripheriewinkels ist so groß, wie die halbe Sehne seines Bogens.

Anmerkung: Wird man (Fig. 27.) mit dem Radius UA des nämlichen Kreises von U aus als dem Scheitelpunkte des Peripheriewinkels CUM einen Kreis beschreiben, so wird AE sein Sinus (§. 57. a.), und dieser ist wieder gleich der Hälfte der Sehne CM des Bogens dieses Winkels, da AE = CK (I. §. 41. Zus. IV.), und CK = $\frac{1}{2}$ CM (I. §. 36. Zus. II.).

§. 64.

Supplementswinkel.

a) Wenn man in der Peripherie des Kreises einen beliebigen Punkt als Anfangspunkt annimmt, so nennt man der Ordnung nach die Kreisbögen von 90 Grad den ersten, zweiten, dritten, und vierten Quadranten (I. §. 62. a.); auf diese Weise ist (Fig. 27.) für den Anfangspunkt B der Quadrant BG der erste, dann GN der zweite, ferner NS der dritte, und SB der vierte Quadrant.

b) Bei Winkeln, welche von 0 Grad bis 90 Grad, dann von 90 bis 180, ferner von 180 bis 270, und von 270 bis 360 Grad halten, sagt man der Ordnung nach, sie liegen im ersten, zweiten, dritten, oder vierten Quadranten; deßhalb liegt (Fig. 27.) der spitzige Winkel BAC im ersten, der stumpfe Winkel BAM im zweiten, der erhabene Winkel BAQ zwischen 180 und 270 Grad ist, im dritten, und endlich der erhabene Winkel BAU zwischen 270 und 360 Grad im vierten Quadranten.

c) Bögen heissen, wie die Winkel, spitzig oder stumpf, je nachdem sie weniger oder mehr als 90, aber nicht über 180 Grad halten; daher wird (Fig. 27.) der Bogen BC, der zum spitzigen Winkel BAC gehört, spitzig, und der Bogen BGM des stumpfen Winkels BAM stumpf genannt.

d) Ein spitziger Winkel, der zu einem stumpfen oder erhabenen Winkel addirt oder davon subtrahirt 180 oder 360 Grad gibt, heißt das Supplement des gegebenen stumpfen oder erhabenen Winkels.

Eben so nennt man einen spitzigen Bogen, der zu einem stumpfen Bogen, oder zu einem Bogen, der größer ist als 180 Grad, addirt oder davon subtrahirt 180 oder 360 Grad gibt, das Supplement eines solchen gegebenen Bogens.

Rücksichtlich der Winkel ist (Fig. 27.) zum stumpfen Winkel BAM der spitzige Winkel MAN das Supplement, da BAM + MAN = 180 Grad, dann zum erhabenen Winkel BAQ im dritten Quadranten ist NAQ das Supplement, weil BAQ — NAQ = 180 Grad, und endlich zum erhabenen Winkel BAU im vierten Quadranten ist der spitzige Winkel BAU das Supplement, indem beide zusammen 360 Grad halten.

Auf die nämliche Weise ist zum stumpfen Bogen BGM der Bogen MN, dann zum erhabenen Bogen BGNQ der Bogen NQ, und zum Bogen BGNSU der Bogen BU das Supplement, weil BGM + MN = 180°, dann BGNQ — NQ = 180°, und BGNSU + BU = 360°.

I. Zusatz: Zu einem stumpfen Winkel oder Bogen erhält man das Supplement, wenn man den gegebenen Winkel oder Bogen von 180 Grad abzieht. Denn wenn man den gegebenen stumpfen Winkel oder Bogen mit A, und den dazu gehörigen spitzigen Supplements-Winkel oder Bogen mit B bezeichnet, so ist A + B = 180 Grad, also B = 180° — A; hat demnach z. B. der Winkel oder Bogen 120°, so hält das Supplement 60 Grad.

II. Zusatz: Bei einem erhabenen Winkel oder Bogen im dritten Quadranten erhält man das Supple-

plement, wenn man 180 Grad vom gegebenen Winkel oder Bogen subtrahirt, indem A — B = 180°, also B = A — 180°; hat daher z. B. der Winkel oder Bogen 200 Grad, so hält das Supplement 20 Grad.

III. Zusatz: Endlich bei einem erhabenen Winkel oder Bogen im vierten Quadranten erhält man das Supplement, wenn man von 360 Grad den gegebenen Winkel oder Bogen abzieht, indem A + B = 360°, mithin B = 360° — A; hat demnach z. B. der Winkel oder Bogen 300 Grad, so beträgt die Größe des Supplementes 60 Grad.

§. 65.

III. Lehrsatz:

Jeder stumpfe und erhabene Winkel hat mit seinem Supplemente gleichen Sinus.

Beweis:

1) Ist der gegebene Winkel stumpf, wie (Fig. 27.) der Winkel BAM, so ist der spitzige Nebenwinkel MAN sein Supplement, und beide haben den nämlichen Sinus (§. 62. Zus. III.), nämlich das Perpendikel MZ;

2) Ist der Winkel erhaben, und im dritten Quadranten, wie (Fig. 27.) der Winkel BAQ, so ist das Perpendikel QZ zu ihm, und zugleich zum Supplemente NAQ der Sinus (I. §. 33. Zus. I.);

Ist endlich der Winkel erhaben und im vierten Quadranten, wie (Fig. 27.) der Winkel BAU, so ist das Perpendikel UE zu ihm, und zum spitzigen Supplemente BAU zugleich der Sinus.

Es hat demnach jeder stumpfe oder erhabene Winkel mit seinem spitzigen Supplemente gleichen Sinus; was eben so von den Bögen gilt.

Zusatz: Der stumpfe Peripheriewinkel hat ebenfalls zum Sinus die halbe Sehne seines Bogens. Denkt man sich (Fig. 35.) zum stumpfen Peripheriewinkel BFC den spitzigen Peripheriewinkel BAC, dessen Schenkel auf den Bogen BFC aufstehen, so ist BFC + BAC = 180 Grad (I. §. 71. Zus. V.), mit-

hin ist BAC das Supplement zu BFC (§. 64. d.), und Sin. BFC = Sin. BAC (Lehrs.), folglich ist Sin. BFC = ½ BC, da Sin. BAC = ½ BC (§. 63.).

Es hat demnach der stumpfe Peripheriewinkel, wie der spitzige, die halbe Sehne seines Bogens zum Sinus, und da es außer stumpfen und spitzigen keine anderen Peripheriewinkel geben kann, so sagt man allgemein, jeder Peripheriewinkel habe zum Sinus die halbe Sehne seines Bogens.

Anmerkung: 1) Bezeichnet man den gegebenen stumpfen Winkel oder Bogen mit A, dann das Supplement mit B, und den zu A gehörigen Nebenwinkel mit C, so ist A + B = 180°, und A + C = 180°, also A + B = A + C, und B = C, wie auch Sin. B = Sin. C (§. 62.), ferner Sin. A = Sin. C (§. 62. Zus. III.), folglich Sin. A = Sin. B, wodurch ebenfalls bewiesen ist, daß der stumpfe Winkel oder Bogen mit seinem Supplemente gleichen Sinus hat.

2) Bei den erhabenen Winkeln BAQ und BAU kann man (Fig. 27.) ihre Supplemente NAQ und BAU so in den ersten Quadranten zeichnen, daß B der Anfangspunkt ihrer Bögen ist, und dann die Kongruenz der Dreiecke CEA, dann QAZ und EAU wegen der Gleichheit einer Seite und zweier Winkel nachweisen (I. §. 44. Zus. II.), und daraus folgt dann ebenfalls, daß CE = QZ = UE, und somit jeder erhabene Winkel mit seinem Supplemente gleichen Sinus hat.

3) Der Nebenwinkel unterscheidet sich vom spitzigen Supplementswinkel beim stumpfen Winkel dadurch, daß beim Nebenwinkel eine bestimmte Lage (I. §. 8. a.), und beim Supplemente nur die bestimmte Größe erfordert wird, daß es mit dem stumpfen Winkel 180 Grad hält (§. 64. d.).

§. 66.

Bestimmung, in wie ferne mit der Zunahme des Winkels die Zu- oder Abnahme des Sinus verbunden ist, nebst der Angabe der Lage des Sinus.

a) Der Sinus eines Winkels oder Bogens von 0 Grad ist ebenfalls gleich Null, dann bei 90 ist er dem

Radius des Kreises gleich, den man mit r bezeichnet, oder Sin. $0^\circ = 0$, und Sin. $90^\circ = r$, und im ersten Quadranten wächst der Sinus mit dem Winkel (I. §. 68. Zus.).

b) Der Sinus des stumpfen Winkels nimmt ab, wenn dieser letztere zunimmt, so daß Sin. 180 Grad $= 0$ wird (§. 65.).

c) Der Sinus eines erhabenen Winkels im dritten Quadranten wächst mit dem Winkel, bis Sin. 270 Grad $= r$ wird.

d) Endlich beim Winkel im vierten Quadranten nimmt der Sinus wieder ab, wenn der Winkel größer wird, bis Sin. $360^\circ = 0$ wird.

Den Winkeln und Bögen von 90 und 270 Grad entspricht der größte Sinus (I. §. 68.), welcher der Radius des Kreises selbst ist. Nimmt man nun diesen als Maaß an, und setzt man $r = 1$, so geben die Sinus aller übrigen Winkel und Bögen in Theilen des Halbmessers ausgedrückt, ächte Brüche (Arithm. II. §. 3. a.); man nennt deßwegen den größten Sinus den **Sinus totus**, den man immer mit r oder 1 bezeichnet.

Die Sinus für hohle Winkel oder Bögen im ersten Halbkreise von 0° bis 180 Grad haben mit den Sinusen erhabener Winkel im zweiten Quadranten von 180° bis 360 Grad eine entgegengesetzte Lage; wenn man demnach jene mit dem Zeichen (+) bezeichnet, und **positiv** nennt, so bezeichnet man diese mit dem Zeichen (—), und heißt sie **negativ**. Aus diesem Grunde sagt man, im ersten und zweiten Quadranten ist der Sinus positiv, und im dritten und vierten Quadranten ist er negativ.

Anmerkung: 1) Wenn im Kreise mit der Zunahme des Winkels die Zu- oder Abnahme des Sinus verbunden ist, so ist es nur so zu verstehen, daß zum größeren Winkel ein größerer oder kleinerer Sinus gehört, und nicht in dem Sinne, als wenn die Winkel mit ihren Sinusen im geraden oder umgekehrten Verhältnisse stehen, und deßhalb mit ihnen gerade oder umgekehrt proportionirt sind (Arithm. II. §. 58 — 60.), indem man nicht sagen kann, daß zum zwei-, drei- oder m mal grö-

ßeren Winkel auch ein zwei=, drei= oder m mal größerer Sinus gehört, und aus diesem Grunde die Verhältnisse trigonometrischer Linien für zusammengesetzte Winkel und Bögen durch besondere Lehrsätze bestimmt werden müssen.

2) Zwei gerade Linien, die eine entgegengesetzte Lage haben, stehen in dieser Beziehung auch im algebraischen Kalkul im wirklichen Gegensatze, und dieselben lassen sich mit den angegebenen Zeichen (+ und —) bezeichnen, und als wahrhaft entgegengesetzte Größen behandeln. Denn wenn man die eine dieser Linien setzet, so wird dadurch, daß man auch die andere nach entgegengesetzter Richtung hinzufügt, mithin den fließenden oder beschreibenden Punkt der ersteren Linie zurückführt, von dieser so viel aufgehoben, als die zweite Linie beträgt (Arithm. III. §. 45.).

3) Es ist an und für sich gleich viel, ob man die Sinus des ersten Halbkreises, oder die des zweiten, mit dem Zeichen (+) bezeichnet und positiv nennt; gewöhnlich thut man aber dieses bei den Sinusen des ersten Halbkreises, und heißt dann die des zweiten, die das Zeichen (—) haben, negativ, indem jene zuerst konstruirt werden, und Größen, welche zuerst gegeben oder gesetzt werden, passend positiv, und die ihnen entgegengesetzten dann negativ genannt werden.

4) Wenn man (Fig. 27.) zur Linie CE die Linie EU hinzufügt, so geben sie zur Summe die Linie CU, welche die einzige Richtung von C nach U hat, da auf diese Weise die zweite Linie EU nur eine Verlängerung der Linie CE ist, und mit ihr einerlei Richtung hat. Ist aber CE der Sinus des spitzigen Winkels BAC und UE der Sinus des erhabenen Winkels BAU, so ist der zweite Sinus nicht die Verlängerung des ersten, und hat vielmehr eine eigene, zu ihm entgegengesetzte Lage.

5) Das hier in Absicht auf den Sinus Bemerkte — ist auch auf die übrigen trigonometrischen Linien anzuwenden, in so ferne man auf ihre Richtung sieht, und sie als entgegengesetzte Größen betrachtet.

§. 67.

IV. Lehrsatz:

Gleiche Winkel haben gleiche Komplemente.

Beweis:

1) Wenn die Winkel oder Bögen spitzig oder stumpf, mithin kleiner als 180 Grad sind, und man

sie mit A und D, ihre Komplemente aber mit C und E bezeichnet (§. 59.), so ist nach der Annahme

$$A \pm C = 90°,$$
und $D \pm E = 90°,$

also $A \pm C = D \pm E$, und $C = E$, da $A = D$.

2) Wenn die Winkel oder Bögen größer als 180 Grad sind, so ist

$$A \pm C = 270°,$$
und $D \pm E = 270°,$

also $A \pm C = D \pm E$, und $C = E$, da $A = D$.

Es haben daher immerhin gleiche Winkel oder Bögen gleiche Komplemente.

Zusatz: Gleiche Winkel oder Bögen haben gleiche Kosinus. Bezeichnet man die Winkel oder Bögen, und ihre Komplemente auf die vorige Weise, so ist nach dem Lehrsatze der Winkel oder Bogen C = E, also Sin. C = Sin. E (§. 62.), nun ist Sin. C = Cosin. A, und Sin. E = Cosin. D (§. 59.), also Cosin. A = Cosin. D, das ist, die gleichen Winkel oder Bögen A und D haben gleiche Kosinus.

§. 68.

V. Lehrsatz:

Für einen spitzigen Winkel oder Bogen ist der Kosinus dem Theile des Radius gleich, welcher zwischen dem Mittelpunkte und dem Sinus liegt.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 27.) der spitzige Winkel BAC oder der Bogen BC gegeben, so ist der spitzige Winkel CAG oder der Bogen CG das Komplement, und CK dessen Sinus, somit der Kosinus zum Winkel BAC oder Bogen BC;

2) Weil BAG oder BG = 90 Grad, so steht GA, oder KA, wie CE auf AE senkrecht, und CE # KA (I. §. 38. Zus. I.), und eben so stehen CK und EA

auf AK senkrecht, weßhalb auch EA # CK, und es ist EA = CK (I. §. 41. Zus. IV.);

3) Nach Nro. 1. ist aber CK der Kosinus vom Winkel BAC oder Bogen BC, also ist es auch der Theil AE des Radius, der zwischen dem Zentrum des Kreises, und dem Sinus dieses Winkels oder Bogens liegt.

Anmerkung: Weil (Fig. 27.) der Kosinus CK mit der Linie EA, welche zwischen dem Zentrum A und dem Sinus CE liegt, gleich und parallel ist, mithin damit gleiche Größe und die nämliche Richtung hat, so kann man anstatt CK allemal EA setzen, und diese letztere Linie als den Kosinus des spitzigen Winkels BAC, oder seines Bogens, annehmen, was in der Folge auch mehrentheils geschehen wird.

§. 69.

VI. Lehrsatz:

Wenn ein Winkel oder Bogen größer ist als 90 Grad, so hat derselbe mit seinem Supplemente gleiches Komplement.

I. Beweis:

1) Ist der gegebene Winkel oder Bogen stumpf, wie (Fig. 27.) der Winkel BAM, so ist der Winkel MAN sein Supplement (§. 64. d.), und zu beiden ist der spitzige Winkel GAM das Komplement, da BAM — GAM = 90 Grad, und MAN + GAM = 90 Grad;

2) Ist der Winkel oder Bogen im dritten Quadranten, wie der erhabene Winkel BAQ, so ist der spitzige Winkel NAQ sein Supplement, und zu beiden ist der spitzige Winkel QAS das Komplement, indem BAQ + QAS = 270°, und NAQ + QAS = 90°;

3) Ist endlich der Winkel oder Bogen im vierten Quadranten, wie der erhabene Winkel BAU, so ist der spitzige Winkel BAU sein Supplement, und zu beiden ist der spitzige Winkel UAS das Komplement, weil BAU — UAS = 270°, und BAU + UAS = 90°.

II. Beweis:

Wenn man den gegebenen Winkel oder Bogen mit A, das dazu gehörige Supplement mit B, das Komplement von A aber mit C, und das Komplement des Supplementes B mit E bezeichnet, so ist

1) wenn der Winkel oder Bogen A stumpf ist,

$A - C = 90$ Grad (§. 59.),

dann $B + E = 90$ Grad,

also $A + B - C + E = 180°$,

ferner $A + B = 180°$ (§. 64. d.),

mithin $- C + E = 0$, und $E = C$.

2) Wenn der Winkel oder Bogen A zwischen 180 und 270 Grad ist, so ist

$A + C = 270°$,

dann $B + E = 90°$,

also $A + C - B - E = 180°$,

ferner $A - B = 180°$,

mithin $C - E = 0$, und $C = E$.

3) Ist endlich der gegebene Winkel oder Bogen zwischen 270 und 360 Grad, so ist

$A - C = 270°$,

dann $B + E = 90°$,

also $A + B - C + E = 360°$,

ferner $A + B = 360°$,

folglich $- C + E = 0$, und $E = C$.

Es hat also immerhin der Winkel oder Bogen, der größer ist als 90 Grad, mit seinem Supplemente gleiches Komplement.

Zusatz: Wenn ein Winkel größer ist, als 90 Grad, so hat er mit seinem Supplemente gleichen Kosinus, indem er mit demselben das nämliche Komplement hat (Lehrs.), und der Sinus des Komplementes Kosinus genannt wird (§. 60.).

Anmerkung: Nur für Winkel oder Bogen, die größer sind als 90 Grad, gibt es Supplementswinkel, da man für spitzige Winkel oder Bögen, die kleiner sind als 90 Grad, die Größe der trigonometrischen Linien unmittelbar angibt.

§. 70.

VII. Lehrsatz:

Für jeden Winkel oder Bogen erhält man den Kosinus, wenn man vom Quadrate des Radius des Kreises das Quadrat seines Sinus abzieht, und aus dieser Differenz die Quadratwurzel auszieht, das ist,

$$\text{Cosin. } A = \sqrt{(r^2 - \text{Sin. } A^2)}.$$

Beweis:

1) Wenn der gegebene Winkel oder Bogen spitzig ist, wie (Fig. 27.) der Winkel BAC und sein Bogen BC, so ist AE der Kosinus davon (§. 68.),
und $AE^2 = AC^2 - CE^2$ (I. §. 97. Zus. II.),
wie auch $AE^2 = \sqrt{(AC^2 - CE^2)}$, das ist,
$(\text{Cosin. } A)^2 = r^2 - (\text{Sin. } A)^2$, oder kürzer
$\text{Cosin. } A^2 = r^2 - \text{Sin. } A^2$, und
$\text{Cosin. } A = \sqrt{(r^2 - \text{Sin. } A^2)}$;

2) Ist der gegebene Winkel oder Bogen größer als 90 Grad, so nehme man dessen Supplement B, dieses ist spitzig, mithin $\text{Cosin. } B = \sqrt{(r^2 - \text{Sin. } B^2)}$.

Nun ist $\text{Cosin. } B = \text{Cosin. } A$ (§. 69. Zus.), dann $\text{Sin. } B = \text{Sin. } A$ (§. 65.), und deßhalb $\text{Sin. } B^2 = \text{Sin. } A^2$, daher ist wieder, wenn man diese gleichen Werthe substituirt, $\text{Cosin. } A = \sqrt{(r^2 - \text{Sin. } A^2)}$.

I. Zusatz: Aus den nämlichen Gründen ist für jeden Winkel oder Bogen, wenn man den Winkel oder Bogen mit A bezeichnet, $\text{Sin. } A^2 = r^2 - \text{Cosin. } A^2$, und $\text{Sin. } A = \sqrt{(r^2 - \text{Cosin. } A^2)}$, wie auch $\text{Sin. } A^2 + \text{Cosin. } A^2 = r^2$.

II. Zusatz: Für einen jeden gegebenen Winkel bildet sein Sinus die gegenüber stehende, dann sein Kosinus die anliegende Seite, und der Radius die Hypotenuse eines rechtwinklichten Dreieckes, wie dieses (Fig. 27.) beim spitzigen Winkel BAC ersichtlich ist, der unmittelbar gegeben, oder als Supplement für einen stumpfen oder erhabenen Winkel gesetzt ist, und wobei der Sinus CE dem Winkel A gegenüber ste-

hend, der Kosinus AE ihm anliegend, und der Radius AC die Hypotenuse des rechtwinklichten Dreieckes CEA ist.

III. Zusatz: Der Kosinus eines Winkels von 30 Grad, welcher der Sinus eines Winkels von 60 Grad ist, ist dem halben Radius gleich, multiplizirt mit der Quadratwurzel von 3, das ist, $\text{Cosin. } 30^\circ = \frac{1}{2} r \times \sqrt{3}$.

Denn $\text{Cosin. } 30^\circ = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} r^2)}$, da $\text{Sin. } 30^\circ = \frac{1}{2} \text{ Chord. } 60^\circ = \frac{1}{2} r$ (§. 62. Zus. I.), und $(\text{Sin. } 30^\circ)^2 = \frac{1}{4} r^2$; ferner ist $r^2 - \frac{1}{4} r^2 = \frac{3}{4} r^2$, und $\sqrt{(\frac{3}{4} r^2)} = \frac{1}{2} r \times \sqrt{3}$ (Arithm. III. §. 71. Zus' I.), also $\text{Cosin. } 30^\circ = \frac{1}{2} r \times \sqrt{3} = \frac{1}{2} r \times 1{,}7320508 \ldots = \text{Sin. } 60$ Grad.

Setzt man den Radius des Kreises $= 1$, so ist $\frac{1}{2} r = \frac{1}{2}$, und $\text{Cosin. } 30^\circ = \frac{1}{2} \times 1{,}7320508 \ldots = 0{,}8660254 \ldots = \text{Sin. } 60$ Grad.

IV. Zusatz: Aus dem Sinus eines Winkels oder Bogens läßt sich für einen bestimmten Halbmesser nach dem Lehrsatze die Größe des Kosinus, und aus diesem nach dem ersten Zusatze die Größe des Sinus berechnen.

Anmerkung: Anstatt $(\text{Sin. } A)^2$, dann $(\text{Cosin. } A)^2$ ꝛc. findet man in Vega's Mathematik, und in anderen Lehrbüchern $\text{Sin.}^2 A$, dann $\text{Cosin.}^2 A$ ꝛc.; ich schreibe dagegen $\text{Sin. } A^2$, dann $\text{Cosin. } A^2$ ꝛc. indem es auch aus den beigefügten Erläuterungen und Beweisen ersichtlich ist, daß die letzteren Ausdrücke die Quadrate der trigonometrischen Linien, und nicht die trigonometrischen Linien von den Quadraten dieser Winkel anzeigen.

§. 71.

Bestimmung, in wie ferne mit der Zunahme des Winkels oder Bogens die Zu- oder Abnahme des Kosinus verbunden ist, nebst der Angabe der Lage des Kosinus.

a) Nach dem im vorigen §. aufgestellten Lehrsatze $\text{Cosin. } A = \sqrt{(r^2 - \text{Sin. } A^2)}$ ist $\text{Cosin. } 0^\circ = \sqrt{(r^2 - 0)} = \sqrt{r^2} = r$ und $\text{Cosin. } 90^\circ = \sqrt{(r^2 - r^2)} = 0$, es nimmt demnach im ersten Quadranten bei spitzigen Winkeln oder Bögen der Kosinus ab, wenn

der Winkel zunimmt, und eben so verhält es sich bei den erhabenen Winkeln oder Bögen im dritten Quadranten, indem Cosin. $180^\circ = \sqrt{(r^2 - 0)} = \sqrt{r^2} = r$, und Cosin. $270^\circ = \sqrt{(r^2 - r^2)} = 0$.

b) Bei stumpfen Winkeln oder Bögen im zweiten Quadranten und bei den erhabenen Winkeln oder Bögen im vierten Quadranten nimmt der Kosinus zu, wenn der Winkel wächst; da Cosin. $90^\circ = 0$, und Cosin. $180^\circ = r$, wie auch Cosin. $270^\circ = 0$, und Cosin. $360^\circ = \sqrt{(r^2 - 0)} = \sqrt{r^2} = r$.

Die Kosinus im ersten und vierten Quadranten, wie man es aus ihrer Konstruktion ersieht (Fig. 27.), haben mit den des zweiten und dritten eine entgegengesetzte Lage; deßwegen nennt man die Kosinus der Winkel oder Bögen von 0° bis 90°, und von 270 bis 360 Grad positiv, und bezeichnet sie mit (+), und jene von 90 bis 270 Grad heißt man negativ, und bezeichnet sie mit (—).

Zusatz: Daraus läßt sich, wenn die Größe des Winkels oder Bogens gegeben oder bekannt ist, bestimmen, welche Lage der Kosinus hat, und welches Zeichen ihm somit beizufügen ist.

Anmerkung: Daß hier von keinem bestimmten geraden Verhältnisse die Rede ist, und in welchem Sinne die Kosinus positive und negative Größen genannt werden, ist schon in den dem §. 66. beigefügten Anmerkungen erörtert worden.

§. 72.

VIII. Lehrsatz:

Für jeden Winkel oder Bogen erhält man den Quersinus, wenn man dessen Kosinus vom gegebenen Radius des Kreises subtrahirt; das ist,

$$\text{Sinv.} = r - \text{Cosin. } A.$$

Beweis:

1) Wenn der Winkel oder Bogen spitzig, oder erhaben im vierten Quadranten ist, mithin zwischen 0 und 90°, oder zwischen 270° und 360 Grad liegt, wie

(Fig. 27.), der spitzige Winkel BAC und sein Bogen BC, oder der erhabene Winkel BAU und sein Bogen BGNSU, so ist offenbar der Quersinus BE = AB — AE, folglich ist im ersten und vierten Quadranten Sinv. A = r — Cosin. A, da man den gegebenen Winkel oder Bogen mit A bezeichnet, dann AB der Radius des Kreises, die Linie AE aber der Kosinus dieses Winkels oder Bogens ist;

2) Für Winkel oder Bögen im zweiten und dritten Quadranten von 90° bis 270 Grad, wie für den stumpfen Winkel BAM und den erhabenen Winkel BAQ, und ihre Bögen BGM und BGNQ ist der Quersinus BZ = BA + AZ, mithin, da BA der Radius, und der Kosinus AZ im zweiten und dritten Quadranten negativ ist (§. 71.), Sinv. A = r + (— Cosin. A) = r — Cosin. A (Arithm. III. §. 45. Lehrs. III.).

Man erhält demnach immerhin den Sinusversus, wenn man vom Radius den Kosinus des nämlichen Winkels oder Bogens subtrahirt.

I. Zusatz: Der Sinusversus von 0 Grad, oder Sinv. 0° = Sinv. 360° = 0, dann Sinv. 90° = Sinv. 270° = r, und Sinv. 180° = 2r; woraus sich bestimmen läßt, wie mit der Zunahme des Winkels die Zu- oder Abnahme des Sinusversus verbunden ist; er nimmt nämlich bei Winkeln oder Bögen von 0° bis 180 Grad zu, und von 180° bis 360° ab.

II. Zusatz: Der Sinusversus hat vom Anfangspunkte des Bogens aus stets die nämliche Richtung, daher bleibt er auch immer positiv.

§. 73.

IX. Lehrsatz:

Zwei gleiche spitzige Winkel oder Bögen haben gleiche Tangenten und gleiche Sekanten.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 27.) der spitzige Winkel BAC = MAN, und der Bogen BC = arc. MN und zum ersten Winkel oder Bogen sei BD die Tangens, und

AD die Sekans, und zum zweiten sei NR die Tangens (§. 58. a.) und AR die Sekans, (§. 58. b.);

2) Da überdieß der Radius AB = AN, und der Winkel B = N = 90 Grad, so ist △ ABD ≌ △ NAR (I. §. 44. Zus. II.), und BD = NR, wie auch AD = AR (§. 18. Zus. IV.), das ist, die Tangenten gleicher spitziger Winkel oder Bögen, und ihre Sekanten sind einander gleich.

I. Zusatz: Gleiche Winkel oder Bögen haben gleiche Kotangenten und gleiche Kosekanten. Denn wenn A und D gleiche Winkel oder Bögen, und C und E ihre Komplemente bezeichnen, so ist das Komplement C = E (§. 67.), und, weil die Komplemente allemal spitzig sind (§. 59.), Tang. C = Tang. E, und Sec. C = Sec. E (Lehrs.); nun ist Tang. C = Cotang. A, und Tang. E = Cotang. D (§. 60.), mithin Cotang. A = Cotang. D, das ist, gleiche Winkel oder Bögen haben gleiche Kotangenten und gleiche Kosekanten.

II. Zusatz: Wenn ein Winkel oder Bogen größer ist als 90 Grad, so hat er mit seinem Supplemente gleiche Kotangens, und gleiche Kosekans. Denn wenn der gegebene Winkel oder Bogen mit A, und sein Supplement mit B bezeichnet wird, so hat A mit B gleiches Komplement (§. 69.), und deßhalb hat der Winkel oder Bogen A mit seinem Supplemente B gleiche Kotangens und gleiche Kosekans (§. 60.).

§. 74.

X. Lehrsatz:

Der stumpfe Winkel hat mit seinem spitzigen Nebenwinkel gleiche Tangens und gleiche Sekans.

Beweis:

1) Vom stumpfen Winkel BAM ist (Fig. 27.) die Linie BT die Tangens, und die in der Verlängerung von MA liegende Linie AT ist die Sekans (§. 58. a. und b.);

2) Die Linie BA liegt mit der Linie AN, da beide

zusammen den Durchmesser AN bilden in einer geraden Linie (§. 8. a.), und eben so ist die Linie MA mit AT in einer geraden Richtung, da letztere Linie die Verlängerung von der ersteren ist;

3) Vom spitzigen Winkel MAN ist NR die Tangens und AR die Sekans; nun ist der Radius AB = AN, dann der Winkel B = N = 90 Grad, und die Scheitelwinkel BAT und RAN sind auch einander gleich (I. §. 10. Zus. III.), folglich △ BAT ≌ △ RAN (I. §. 44. Zus. II.), und BT = NR, wie auch *A*T = *A*R, das ist, der stumpfe Winkel hat mit seinem spitzigen Nebenwinkel gleiche Tangens und gleiche Sekans.

I. Zusatz: Der stumpfe Winkel oder Bogen hat mit seinem spitzigen Supplemente gleiche Tangens und gleiche Sekans. Denn der stumpfe Winkel hat mit seinem spitzigen Nebenwinkel 180 Grad (I. §. 11. Zus. III.), dieser ist deßhalb zu ihm zugleich das Supplement (§. 64. d.), und der stumpfe Winkel hat mit seinem Supplemente, wie mit seinem spitzigen Nebenwinkel, gleiche Tangens und gleiche Sekans. Bezeichnet *A* den gegebenen stumpfen Winkel oder Bogen, und B sein Supplement, C hingegen seinen spitzigen Nebenwinkel, so ist nach dem Lehrsatze Tang. A = Tang. C, dann *A* + C = 180 Grad, gleichwie *A* + B = 180 Grad, also *A* + C = *A* + B, und C = B, somit, da diese beiden Winkel spitzig sind, Tang. C = Tang. B, folglich auch Tang. *A* = Tang. B, und aus den nämlichen Gründen ist Sec. *A* = Sec. B.

II. Zusatz: Der erhabene Winkel oder Bogen zwischen 180° und 270 Grad hat mit seinem Supplemente gleiche Tangens und gleiche Sekans. Denn (Fig. 27.) der erhabene Winkel B*A*Q und sein Bogen BGNQ hat BD zur Tangens und *A*D zur Sekans; sein Supplement ist der spitzige Winkel N*A*Q, und dieser ist dem Winkel B*A*C gleich (I. §. 10. Zus. III.); nun aber ist zum Winkel B*A*C = N*A*Q ebenfalls BD die Tangens und *A*D die Sekans, also hat der erhabene Winkel oder Bogen zwischen 180° und 270 Grad mit seinem Supplemente gleiche Tangens und gleiche Sekans.

III. Zusatz: Der erhabene Winkel oder Bogen zwischen 270° und 360 Grad hat ebenfalls mit seinem Supplemente gleiche Tangens und gleiche Sekans. Denn (Fig. 27.) für den erhabenen Winkel B*A*U und seinen Bogen BGNSU ist der hohle spitzige Winkel B*A*U und sein Bogen BU das Supplement; macht man nun den Winkel B*A*C dem spitzigen Winkel B*A*U gleich, so ist, weil *A*B = *A*B, und DB*A* = *A*BT, das Dreieck *A*BD ≌ △ *A*BT, und BD = BT, wie auch *A*D = *A*T, das ist, auch im vierten Quadranten hat der erhabene Winkel mit seinem Supplemente gleiche Tangens und gleiche Sekans.

IV. Zusatz: Jeder Winkel oder Bogen, der größer ist, als 90 Grad, hat demnach mit seinem Supplemente allemal gleiche Tangens und gleiche Sekans, da es für spitzige Winkel oder Bögen noch kein Supplement gibt, und der Satz in den vorausgehenden Zusätzen für die stumpfen und für die erhabenen Winkel oder Bögen als richtig erwiesen ist.

§. 75.

XI. Lehrsatz:

Die Sekans eines Winkels oder Bogens ist gleich der Quadratwurzel aus der Summe von dem Quadrate des Radius des Kreises und dem Quadrate der Tangens des nämlichen Winkels oder Bogens; das ist,

$$\text{Sec. } A = \sqrt{(r^2 + \text{Tang. } A^2)}.$$

Beweis:

1) Wenn der Winkel oder Bogen kleiner ist als 90 Grad, wie (Fig. 27.) der spitzige Winkel B*A*C und sein Bogen BC, so ist, weil das Dreieck *A*BD rechtwinklicht ist, $AD^2 = AB^2 + BD^2$ (I. §. 97.), und $AD = \sqrt{(AB^2 + BD^2)}$;

2) Nun ist *A*D die Sekans und BD die Tangens des Winkels oder Bogens, und *A*B ist der Radius des Kreises, somit ist $\text{Sec. } A = \sqrt{(r^2 + \text{Tang. } A^2)}$;

3) Ist der Winkel oder Bogen größer als 90 Grad, so nehme man dessen Supplement B; es ist dieses spitzig, und deßhalb Sec. B $= \sqrt{}(r^2 + \text{Tang. } B^2)$;

4) Nun ist Sec. B = Sec. A, und Tang. B = Tang. A, da jeder Winkel oder Bogen mit seinem Supplemente gleiche Tangens und gleiche Sekans hat (§. 74. Zus. IV.).

Aus diesem Grunde ist wieder Sec. A $= \sqrt{}(r^2 + \text{Tang. } A^2)$.

I. Zusatz: Für jeden Winkel oder Bogen bildet der Radius den anliegenden, die Tangens den gegenüberstehenden Katheten, und die Sekans die Hypotenuse eines rechtwinklichten Dreieckes, da (Fig. 27.) dem spitzigen Winkel BAC oder A der Radius AB anliegt, dann ihm die Tangens BD gegenüber steht, und die Sekans AD die Hypotenuse des rechtwinklichten Dreieckes ABD ist, und man beim stumpfen und erhabenen Winkel den Supplementswinkel annimmt.

II. Zusatz: Wenn der Winkel oder Bogen 45 Grad hält, so ist die dazu gehörige Tangens so groß, wie der Radius des Kreises. Denn wenn (Fig. 27.) im rechtwinklichten Dreiecke ABD der Winkel BAD oder A die Hälfte eines rechten Winkels oder 45 Grad beträgt, so hat der Winkel BDA auch 45 Grad (I. §. 43. Zus. V.), und BD = AB (I. §. 23.), das ist, Tang. $45^{\circ} = r$.

III. Zusatz: Die Sekans eines Winkels von 45 Grad ist gleich dem Radius des Kreises, multiplizirt mit der Quadratwurzel von 2, das ist, Sec. $45^{\circ} = r \times \sqrt{2}$. Denn nach dem vorigen Zusatze ist Tang. $45^{\circ} = r$, und nach dem Lehrsatze ist Sec. A $= \sqrt{}(r^2 + \text{Tang. } A^2)$, also Sec. A $= \sqrt{}(r^2 + r^2) = \sqrt{}(2r^2) = r\sqrt{2}$.

Setzt man den Radius des Kreises oder $r = 1$, so ist $r\sqrt{2} = \sqrt{2}$, und dann ist Sec. $45^{\circ} = \sqrt{2} = 1{,}4142136\ldots$

§. 76.

XII. Lehrsatz:

Die Tangens eines Winkels oder Bogens ist gleich dem Radius des Kreises, multiplizirt mit dem Sinus und dividirt durch den Kosinus des nämlichen Winkels; das ist,

$$\text{Tang. A} = \frac{\text{r . Sin. A}}{\text{Cosin. A}}.$$

Beweis:

1) Wenn der Winkel oder Bogen spitzig ist, wie (Fig. 27.) der Winkel BAC und sein Bogen BC, und man die Tangens und den Sinus und Kosinus dafür verzeichnet, so ist das Dreieck ABD dem Dreiecke AEC ähnlich, da BD und CE als Perpendikel auf AB unter sich parallel sind (I. §. 91.);

2) Weil $\triangle ABD \backsim \triangle CEA$, so verhält sich
$AE : AB = EC : BD$, das ist,
$\text{Cosin. } A : \text{r} = \text{Sin. } A : \text{Tang. } A$,
folglich $\text{Tang. } A = \frac{\text{r . Sin. A}}{\text{Cosin. } A}$ (Arithm. IV. §. 36.).

3) Ist der gegebene Winkel oder Bogen A größer als 90 Grad, somit stumpf oder erhaben, so nehme man dessen Supplement B; es ist dieses spitzig, und deßhalb nach dem Lehrsatze

$$\text{Tang. B} = \frac{\text{r . Sin. B}}{\text{Cosin. B}};$$

4) Nun ist Tang. B = Tang. A (§. 74. Zus. IV.), dann Sin. B = Sin. A (§. 65.), und Cosin. B = Cosin. A (§. 69. Zus.), folglich ist wieder, wenn der gegebene Winkel oder Bogen größer ist als 90 Grad,

$$\text{Tang. } A = \frac{\text{r . Sin. } A}{\text{Cosin. } A}.$$

§. 77.

XIII. Lehrsatz:

Die Sekans eines Winkels oder Bogens ist gleich dem Quadrate des Radius, dividirt durch den Kosinus des nämlichen Winkels oder Bogens; das ist,

$$\text{Sec. A} = \frac{r^2}{\text{Cosin. A}}.$$

Beweis:

1) Wenn der Winkel oder der Bogen spitzig ist, wie (Fig. 27.) der Winkel BAC und sein Bogen BC, so ist aus dem im §. 76. bei Nro. 1. angegebenen Grunde das Dreieck DBA dem Dreiecke CEA ähnlich;

2) Daher verhält sich (I. §. 90.)

AE : AC = AB : AD, das ist,

Cosin. A : r = r : Sec. A, und

$$\text{Sec. A} = \frac{r^2}{\text{Cosin. A}}.$$

3) Ist der Winkel oder Bogen größer als 90 Grad, somit stumpf oder erhaben, so nehme man das dazu gehörige Supplement, dieses ist spitzig, folglich ist

$$\text{Sec. B} = \frac{r^2}{\text{Cosin. B}};$$

4) Nun ist Sec. B = Sec. A (§. 74. Zus. IV.), und Cosin. B = Cosin. A §. 69. Zus.), daher ist auch beim stumpfen oder erhabenen Winkel oder Bogen seine Sekans, oder $\text{Sec. A} = \frac{r^2}{\text{Cosin. A}}$.

§. 78.

Bestimmung, in wie ferne mit der Zunahme der Winkel oder Bögen die Zu= oder Abnahme ihrer Tangenten und Sekanten verbunden ist, nebst der Angabe der Lage dieser Linien.

a) Im ersten und dritten Quadranten wächst die Tangens mit dem Winkel oder Bogen (§. 66. Anmerkung 1.), weil Tang. A $= \frac{r \cdot \text{Sin.} A}{\text{Cosin.} A}$ (§. 76.), und in diesen beiden Quadranten der Sinus zu- und der Kosinus abnimmt, wenn der Winkel oder Bogen größer wird; dagegen nimmt aber die Tangens im zweiten und vierten Quadranten ab, wenn der Winkel wächst, weil da bei der Zunahme des Winkels der Sinus ab- und der Kosinus zunimmt (§. 66 und §. 71.).

Ferner ist Tang. 0° = Tang. 180° = Tang. $360^\circ = \frac{r}{r} \times 0 = 0$, und Tang. 90° = Tang. $270^\circ = \frac{r \cdot 1}{0} = \infty$; indem bei einem Winkel oder Bogen von 90 und 270° die Tangens mit der Sekans parallel ist, und deshalb, wie immer verlängert, mit ihr nie zusammenstoßt (§. 58. Zus. IV.).

b) Die Sekans eines Winkels oder Bogens steht, weil Sec. A $= \frac{r^2}{\text{Cosin.} A}$ (§. 77.), und der Radius für den nämlichen Kreis immer die nämliche Größe hat, mit dem Kosinus des nämlichen Winkels oder Bogens im umgekehrten Verhältnisse, sie wächs't also im ersten und dritten Quadranten mit dem Winkel, und nimmt im zweiten und vierten ab, wenn der Winkel oder Bogen zunimmt (71.).

Ferner ist Sec. 0° = Sec. 180° = Sec. $360^\circ = \frac{r^2}{r} = r$, und Sec. 90° = Sec. $270^\circ = \frac{r^2}{0} = \infty$, da bei 90° und 270° die Sekans mit der Tangens nie zusammentrifft (§. 58. Zus. IV.).

c) Entweder aus der durch den Lehrsatz Tang. A $= \frac{r \cdot \text{Sin.} A}{\text{Cosin.} A}$ aufgestellten Gleichung (§. 76.), wenn man auf die Zeichen des Sinus und des Kosinus Rücksicht nimmt (§. 66 und §. 71.), oder aus der Konstruktion der Tangenten für die Winkel oder Bögen

der vier Quadranten (Fig. 27.) ersieht man, daß dieselben im ersten und dritten Quadranten positiv, im zweiten und vierten Quadranten aber negativ sind (§. 66. Anmerk. 2 und 3.).

d) Weil endlich nach dem im §. 77. aufgestellten Lehrsatze $\text{Sec. } A = \frac{r^2}{\text{Cosin. } A}$ ist, so hat die Sekans mit dem Kosinus einerlei Zeichen, sie ist demnach im ersten und vierten Quadranten positiv, und im zweiten und dritten negativ (§. 71.).

Anmerkung: 1) Da bei Winkeln oder Bögen von 90° und von 270 Grad die Tangens mit der Sekans nie zusammenstoßt (§. 58. Zus. IV.), und sich deßhalb diese Linien keine bestimmte Größe geben, wenn man ihre Verlängerung immer fortsetzen würde, so hat man sie mit dem Zeichen des Unendlichgroßen bezeichnet (Arithmetik I. §. 9. Nro. 6.), welches aber, wie es aus den in der Stereometrie über die unendlichen Größen angeführten Bemerkungen erhellet, nicht bedeutet, daß die für diese Winkel konstruirten Tangenten und Sekanten wirklich unendlich groß sind, sondern nur anzeigt, daß die bei solchen Winkeln oder Bögen gezogenen Tangenten und Sekanten nie eine bestimmte Größe erhalten, und deßhalb unbestimmerbar groß sind, wenn man sie auch wie immer verlängert.

2) Daß die Sekans im ersten und vierten Quadranten positiv, und im zweiten und dritten negativ ist, ersieht man aus der Konstruktion der Figur, wie bei der Tangens (§. 58.), da die Sekans (Fig 27.) im ersten Falle bei dem spitzigen Winkel BAC und dem erhabenen BAU in der Richtung der Schenkel AC und AU fällt, und mit den Schenkeln, die man verlängert, in eine entgegengesetzte Richtung kömmt.

§. 79.

XIV. Lehrsatz:

Die Kotangens eines Winkels oder Bogens ist gleich dem Quadrate des Radius, dividirt durch seine Tangens, und die Kotangens ist auch gleich dem Produkte aus dem Radius in den Kosinus,

dividirt durch den Sinus des nämlichen Winkels oder Bogens; das ist,

$$\text{Cotang. A} = \frac{r^2}{\text{Tang. A}} = \frac{r \,.\, \text{Cosin. A}}{\text{Sin. A}}.$$

Beweis:

1) Wenn der Winkel oder Bogen spitzig ist, wie (Fig. 27.) der Winkel BAC und sein Bogen BC, so ist GF mit CK, und BD mit CE parallel, da der Winkel G = K = 90°, und der Winkel B = E = 90°;

2) Deßwegen ist △FGA ∽ △CKA, und △CKA ∽ △CEA, weil der Winkel ACK = EAC, und der Winkel K = E = 90 Grad (I. §. 91 und §. 92. Zus.), und daraus folgt, daß △DBA ∽ △CEA ∽ △FGA ∽ △CKA.

3) Weil diese vier Dreiecke einander ähnlich sind, so verhält sich

BD : BA = AG : GF,
und CE : EA = AG : AF,
das ist, Tang. A : r = r : Cotang. A,
und Sin. A : Cosin. A = r : Cotang. A,

folglich $\text{Cotang. A} = \frac{r^2}{\text{Tang. A}}$,

und $\text{Cotang. A} = \frac{r \,.\, \text{Cosin. A}}{\text{Sin. A}}$;

4) Ist der Winkel oder Bogen größer als 90 Grad, somit stumpf, oder erhaben, so nehme man dessen Supplement B, dieses ist spitzig, mithin ist

$$\text{Cotang. B} = \frac{r^2}{\text{Tang. B}} = \frac{r \,.\, \text{Cosin. B}}{\text{Sin. B}};$$

5) Nun ist Cotang. B = Cotang. A (§. 73. Zus. II.), dann Tang. B = Tang. A (§. 74. Zus. IV.), ferner Cosin. B = Cosin. A (§. 69. Zus.), und Sin. B = Sin. A (§. 65.), daher ist wieder

$$\text{Cotang. A} = \frac{r^2}{\text{Tang. A}} = \frac{r \,.\, \text{Cosin. A}}{\text{Sin. A}}.$$

I. Zusatz: Nach dem Lehrsatze $\text{Cotang. A} = \frac{r^2}{\text{Tang. A}}$ steht die Kotangens mit der Tangens im umgekehrten Verhältnisse, und hat mit ihr einerlei Zeichen, dieselbe ist demnach im ersten und dritten Quadranten positiv, und im zweiten und vierten negativ (§. 78. c.), und die Kotangens nimmt im ersten und dritten Quadranten ab, wenn der Winkel wächst, und im zweiten und vierten nimmt sie zu, wenn der Winkel oder Bogen größer wird.

II. Zusatz: Die Kotangenten zweier Winkel oder Bögen sind mit ihren Tangenten umgekehrt proportionirt.

Denn nach dem Lehrsatze ist, wenn man die gegebenen Winkel oder Bögen mit A und C bezeichnet,

$$\text{Cotang. A} = \frac{r^2}{\text{Tang. A}},$$

und $\text{Cotang. C} = \frac{r^2}{\text{Tang. C}},$

also $\text{Cotang. A} : \text{Cotang. C} = \frac{r^2}{\text{Tang. A}} : \frac{r^2}{\text{Tang. C}},$

und $\text{Cotang. A} : \text{Cotang. C} = \text{Tang. C} : \text{Tang. A}$ (Arithm. IV. §. 41.).

Anmerkung: Im zweiten Zusatze sagt man, daß die Kotangenten der Winkel oder Bögen mit den Tangenten derselben umgekehrt proportionirt sind, weil sie so als Glieder der Proportion vorkommen, daß dem ersten Gliede das vierte, und dem zweiten das dritte entspricht (Arithm. II. §. 60.).

§. 80.

XV. Lehrsatz:

Die Kosekans eines Winkels oder Bogens ist gleich der Quadratwurzel aus der Summe von dem Quadrate des Radius des Kreises und dem Quadrate der Kotangens, und dieselbe ist auch gleich dem Quadrate des Radius, dividirt durch

den Sinus des nämlichen Winkels oder Bogens; das ist,

$$\text{Cosec. A} = \sqrt{(r^2 + \text{Cotang. A}^2)} = \frac{r^2}{\text{Sin. A}}.$$

Beweis:

1) Wenn der Winkel oder Bogen spitzig ist, wie (Fig. 27.) der Winkel BAC und sein Bogen BC, so ist (I. §. 97.)

$$AF^2 = AG^2 + GF^2,$$

und $AF = \sqrt{(AG^2 + GF^2)}$,

das ist, $\text{Cosec. A} = \sqrt{(r^2 + \text{Cotang. A}^2)}$;

2) Weil das Dreieck CEA dem Dreiecke FGA ähnlich ist (§. 79.), so verhält sich

$$CE : CA = AG : AF,$$

das ist, $\text{Sin. A} : r = r : \text{Cosec. A}$,

und $\text{Cosec. A} = \frac{r^2}{\text{Sin. A}}$;

3) Ist der Winkel oder Bogen stumpf oder erhaben, also größer als 90 Grad, so nehme man dessen Supplement, dieses ist spitzig, mithin ist dem eben Erwiesenen gemäß

$$\text{Cosec. B} = \sqrt{(r^2 + \text{Cotang. B}^2)} = \frac{r^2}{\text{Sin. B}};$$

4) Ferner ist Cosec. B = Cosec. A, dann Cotang. B = Cotang. A (§. 73. Zus. II.), und Sin. B = Sin. A (§. 65.), folglich ist wieder, wenn auch der Winkel oder Bogen größer ist als 90 Grad,

$$\text{Cosec. A} = \sqrt{(r^2 + \text{Cotang. A}^2)} = \frac{r^2}{\text{Sin. A}}.$$

I. Zusatz: Für jeden Winkel oder Bogen bildet die Kotangens den anliegenden, dann der Radius den gegenüber stehenden Katheten, und die Kosekans die Hypothenuse eines rechtwinklichten Dreieckes. Bei spitzigen Winkeln oder Bögen (Fig. 27.) sieht man dieses aus der Konstruktion des Radius AG, dann der Kotangens GF und der Kosekans AF, da dem Win-

kel *AFG*, welcher dem gegebenen *BAC* oder *A* gleich ist (I. §. 41.), der Radius *AG* gegenüber steht, und die Kosekans *FG* demselben anliegt; bei stumpfen und erhabenen Winkeln oder Bögen hingegen setzt man ihre spitzigen Supplementswinkel, und weiset bei ihnen das Nämliche nach, indem sie damit die nämlichen Kotangenten und Kosekanten haben (§. 73. Zus. II.).

II. Zusatz: Nach dem Lehrsatze $\text{Cosec. } A = \frac{r^2}{\text{Sin. } A}$ steht die Kosekans mit dem Sinus im umgekehrten Verhältnisse, und hat mit ihm immer das nämliche Zeichen, dieselbe ist demnach bei hohlen Winkeln oder Bögen von 0° bis 180 Grad positiv, und bei erhabenen Winkeln oder Bögen von 180° bis 360 Grad negativ (§. 66.).

§. 81.

XVI. Lehrsatz:

Wenn die Kreise verschieden sind, so sind bei gleichen Winkeln und den ihnen entsprechenden ähnlichen Bögen die gleichnamigen trigonometrischen Linien unter sich, und mit den Radien ihrer Kreise gerade proportionirt.

Beweis:

1) Es seien (Fig. 27.) für den Zentriwinkel *BAC* oder seinen Bogen *BC* des um *A* beschriebenen einen Kreises, und eben so (Fig. 28.) für den gleichen Zentriwinkel bac des um a beschriebenen Kreises die trigonometrischen Linien, nämlich der Sinus und Kosinus, dann die Tangens und Kotangens, und die Sekans und Koseckans gezeichnet; man nennt nun den Sinus *A* und Sinus a, dann Kosinus *A* und Kosinus a 2c. gleichnamige trigonometrische Linien, und die Bögen *CB* und bc, welche in verschiedenen Kreisen gleichen Zentriwinkeln entsprechen, und gleich viele Grade, Minuten 2c. enthalten, heissen ähnliche Bögen;

2) Weil nach der Bedingung des Lehrsatzes der Winkel BAC = bac, und E = e = 90 Grad, so ist das Dreieck CEA ähnlich dem Dreiecke cea (I. §. 92. Zus.), und deßhalb auch (§. 79.)

$$\triangle CEA \backsim \triangle dba \backsim \triangle fga \backsim \triangle cka,$$

gleichwie $\triangle$ cea $\backsim \triangle DBA \backsim \triangle FGA \backsim$

$$\triangle CKA,$$

das ist, diese acht Dreiecke sind unter sich ähnlich (I. §. 90. Zus. III.);

3) Bei ähnlichen Dreiecken sind die homologen Seiten gerade proportionirt, daher, wenn man bei Linien des einen Kreises mit den großen Buchstaben, und die des anderen mit den kleinen bezeichnet, so verhält sich bei den gleichen Zentriwinkeln oder Bögen A und a

$$AE : CE = ae : ce,$$
$$AD : BD = ad : bd,$$
$$AF : FG = af : fg,$$ und so fortgesetzt,

das ist, Cosin. A : Sin. A = Cosin. a : Sin. a,
Sec. A : Tang. A = Sec. a : Tang. a,
Cosec. A : Cotang. A = Cosec. a : Cotang. a, u. s. f.,

ferner CE : ce = CA : ca,
DB : db = BA : ba,
FG : fg = AG : ag, 2c.

das ist, Sin. A : Sin. a = R : r,
Tang. A : Tang. a = R : r,
Cotang. A : Cotang. a = R : r, u. s. f.

Es sind also, wenn die Kreise verschieden sind, bei gleichen Zentriwinkeln und ähnlichen Bögen die gleichnamigen trigonometrischen Linien unter sich, und mit den Radien dieser Kreise gerade proportionirt (Arithmetik II. §. 59.).

1. Zusatz: Wenn man den trigonometrischen Linien eines Winkels oder Bogens A für den Halbmesser R weiß, so sind sie auch in einem anderen Kreise bei dem nämlichen Winkel oder ähnlichen Bogen für dessen Halbmesser r bekannt.

Denn nach dem Lehrsatze verhält sich
Sin. A : Sin. a = R : r,
Tang. A : Tang. a = R : r, u. s. f.,

also ist, wenn die Radien R und r, und der Sinus, dann die Tangens von A rc. bekannt sind.

$$\text{Sin. a} = \frac{\text{Sin. } A \times r}{R},$$

$$\text{Tang. a} = \frac{\text{Tang. } A \times r}{R}, \text{ u. s. f.,}$$

II. Zusatz: Setzt man den Radius r des einen Kreises gleich der Zahl 1, so ist

$$\text{Sin. a} = \frac{\text{Sin. } A}{R},$$

$$\text{Tang. a} = \frac{\text{Tang. } A}{R}, \text{ u. s. f.}$$

III. Zusatz: Umgekehrt findet man die trigonometrischen Linien für den Halbmesser R, wenn sie für den Halbmesser r bekannt sind; indem

$$\text{Sin. } A : \text{Sin. a} = R : r,$$

$$\text{Tang. } A : \text{Tang. a} = R : r, \text{ u. s. f.,}$$

$$\text{also Sin. } A = \frac{\text{Sin. a} \times R}{r},$$

$$\text{Tang. } A = \frac{\text{Tang. a} \times R}{r}, \text{ u. s. f.,}$$

IV. Zusatz: Setzt man den Radius r des einen Kreises gleich der Zahl 1, so ist nach dem vorigen Zusatze

$$\text{Sin. } A = \text{Sin. a} \times R,$$

$$\text{Tang. } A = \text{Tang. a} \times R, \text{ u. s. f.}$$

Anmerkung: Bei den hier über die Verhältnisse der trigonometrischen Linien aufgestellten Lehrsätzen kommen der Sinus und Kosinus, dann die Tangens und Kotangens, und die Sekans und Kosekans vor; des Quersinus wird dabei nicht mehr erwähnt, da er bei den für die spitzigen Winkel oder Bögen konstruirten trigonometrischen Linien nicht als Seite der Dreiecke vorkömmt, aus derer Aehnlichkeit die angeführten Verhältnisse erkannt werden.

§. 82.
Folgerungen aus den bisher über die trigonometrischen Linien aufgestellten Lehrsätzen.

a) Im nämlichen Kreise entsprechen gleichen Winkeln oder Bögen gleiche Sinus und Kosinus, dann gleiche Tangenten und Kotangenten, und gleiche Sekanten und Kosekanten.

Bei spitzigen Winkeln oder Bögen ist dieses in den §§. 62, 67 und 73 unmittelbar erwiesen, und bei stumpfen und erhabenen Winkeln oder Bögen, die größer sind als 90 Grad, nimmt man die Supplemente, diese sind spitzig, und haben mit den gegebenen Winkeln oder Bögen die genannten trigonometrischen Linien gleich.

b) Wenn man die trigonometrischen Linien für alle Winkel von 0 Grad bis 90 Grad weiß, so weiß man sie auch für alle übrigen Winkel des ganzen Kreises von 90° bis 360 Grad. Denn von letzteren darf man nur die Supplemente nehmen, und bewiesen ist es durch die bisherigen Lehrsätze, daß jeder stumpfe und erhabene Winkel mit seinem Supplemente die sechs genannten trigonometrischen Linien, als den Sinus, Kosinus rc. gleich hat; daher ist z. B. $\text{Sin. } 100^\circ = \text{Sin. } 80^\circ$, dann $\text{Sin. } 200^\circ = \text{Sin. } 20^\circ$, und $\text{Sin. } 300^\circ = \text{Sin. } 60^\circ$, wenn man nämlich auf die Zeichen der Sinus, die im dritten und vierten Quadranten negativ sind, keine Rücksicht nimmt.

c) Wenn man die Betrachtung für die Winkel oder Bögen fortsetzen will, die größer sind als ein ganzer Kreis oder mehr als 360 Grad haben, und die man erhält, wenn man nach gewissen Formeln mehrere Winkel in eine Summe bringt, so leuchtet ein, daß im fünften Quadranten alle trigonometrischen Linien mit jenen des ersten Quadranten die nämliche Größe und die nämliche Lage haben, ferner daß im sechsten Quadranten alles ist, wie im zweiten, im siebenten Quadranten alles wie im dritten, und so fortgesetzt.

In diesem Falle, wenn nämlich ein Winkel mehr als 360 Grad beträgt, dividirt man ihn nur mit 360,

und sucht zum Reste die trigonometrischen Linien, die dann auch zu dem anfangs gegebenen Winkel gehören.

Hat demnach z. B. ein Winkel, oder vielmehr die Summe mehrerer Winkel 420 Grad, so gibt 420, durch 360 dividirt, die Zahl 60 zum Reste und der Winkel von 60 Grad ist im ersten Quadranten, weßhalb Sin. 420° = Sin. 60°, dann Cosin. 420° = Cosin. 60°, u. s. f.

Beträgt die Summe mehrerer Winkel 642° 36', so gibt 642, mit 360 dividirt, 282 zum Reste, zählt man die bei der Division weggelassenen 36 Minuten wieder dazu, so bekömmt man als Rest 282° 36'; dieser Winkel liegt im vierten Quadranten, und zu ihm ist, da 360° — 282° 36' = 77° 24', der Winkel von 77° 24' das Supplement, weßhalb Sin. 77° 24' = — Sin. 642° 36, dann Cosin. 77° 24' = Cosin. 642° 36' ꝛc., indem im vierten Quadranten der Sinus negativ, und der Kosinus positiv ist.

Hält die Summe mehrerer Winkel 1204° 36', und man dividirt mit 360, so erhält man 124° 36' als Rest; dieser Winkel liegt im zweiten Quadranten, und zu ihm ist der Winkel von 55° 24' das Supplement; weßhalb Sin. 55° 24' = Sin. 1204° 36', dann Cosin. 55° 24' = — Cosin. 1204° 36' ꝛc.

Beträgt endlich z. B. die Summe mehrerer Winkel 954° 24, und man dividirt sie mit 360, so erhält man 234° 24' zum Reste, dieser liegt im dritten Quadranten, und hat den Winkel von 54° 24' zum Supplemente, da 234° 24' — 180° = 54° 24', weßhalb Sin. 54° 24' = — Sin. 954° 24', dann Cosin. 54° 24' = — Cosin. 954° 24', weil im dritten Quadranten der Sinus und der Kosinus negativ ist.

Anmerkung: 1) Was in diesen Beispielen in Betreff des Sinus und des Kosinus ausgeführt ist, gilt eben so nach den aufgestellten Lehrsätzen von der Tangens und Kotangens, und von der Sekans und Kosekans für Winkel oder Bögen, die größer sind als 360 Grad.

2) Wenn der gegebene Winkel oder Bogen spitzig ist, so ist eine besondere Berücksichtigung der Zeichen nicht nöthig, weil da alle trigonometrischen Linien positiv sind, und das Zeichen (+) haben, welches man

gewöhnlich nicht schreibt, und am Anfange versteht (Arithm. III. §. 45. Lehrs. III. Zus. II.).

3) Wenn aber die Winkel oder Bögen größer sind als 90 Grad, so muß man bei den wirklichen Berechnungen auf die Zeichen der trigonometrischen Linien nach den aufgestellten Lehrsätzen die geeignete Rücksicht nehmen.

4) Daß jeder stumpfe oder erhabene Winkel mit seinem Supplemente die angeführten trigonometrischen Linien, indeß aber nicht immer in der nämlichen Lage und mit den nämlichen Zeichen, gleich hat, läßt sich in einer Uebersicht für alle Winkel eines Kreises auf folgende Weise darstellen;

Bedeutet A den gegebenen Winkel oder Bogen, dann B dessen Supplement, und R einen rechten Winkel, so bezeichnet der Ausdruck $2R - B$ den stumpfen Winkel A, dann $2R + B$ den erhabenen Winkel A im dritten Quadranten, und $4R - B$ den erhabenen Winkel A im vierten Quadranten, weil $2R - B > 90$ Grad und $< 180^\circ$, dann $2R + A > 180^\circ$ und $< 270^\circ$, und $4R - B > 270^\circ$ und < 360 Grad.

Bei dieser Bezeichnungsweise drückt B immer den entsprechenden spitzigen Supplements-Winkel aus, indem $2R - B = A$, also $A + B = 2R = 180^\circ$, dann $2R + B = A$, also $A - B = 2R = 180^\circ$, und $4R - B = A$, also $A + B = 4R = 360$ Grad (§. 64. d.).

Den angeführten Lehrsätzen gemäß ist für den stumpfen Winkel A

$$\text{Sin. } B = + \text{Sin. } A = + \text{Sin. } (2R - B),$$
$$\text{Cosin. } B = - \text{Cosin. } A = - \text{Cosin. } (2R - B),$$
$$\text{Tang. } B = - \text{Tang. } A = - \text{Tang. } (2R - B),$$
und $\text{Cotang. } B = - \text{Cotang. } A = - \text{Cotang. } (2R - B)$;

dann für den erhabenen Winkel A im dritten Quadranten ist

$$\text{Sin. } B = - \text{Sin. } A = - \text{Sin. } (2R + B),$$
$$\text{Cosin. } B = - \text{Cosin. } A = - \text{Cosin. } (2R + B),$$
$$\text{Tang. } B = + \text{Tang. } A = + \text{Tang. } (2R + B),$$
und $\text{Cotang. } B = + \text{Cotang. } A = + \text{Cotang. } (2R + B)$;

endlich für den erhabenen Winkel im vierten Quadranten ist

$$\text{Sin. } B = - \text{Sin. } A = - \text{Sin. } (4R - B),$$
$$\text{Cosin. } B = + \text{Cosin. } A = + \text{Cosin. } (4R - B),$$
$$\text{Tang. } B = - \text{Tang. } A = - \text{Tang. } (4R - B),$$
und $\text{Cotang. } B = - \text{Cotang. } A = - \text{Cotang. } (4R - B)$.

5) Die vorstehende Darstellung rücksichtlich der Größe und Lage der trigonometrischen Linien bleibt wahr, wenn man die bei vier rechten Winkeln abgebrochenen Betrachtungen für Winkel, die größer sind als 360 Grad, fortsetzt, da die Winkel des fünften, sechsten, siebenten rc. Quadranten, mit den des ersten, zweiten, dritten rc. Quadranten die nämliche Größe und Lage haben, und somit auch immer wieder die nämliche Ordnung der Zeichen wiederkehrt.

6) Das für den Sinus und Kosinus, und für die Tangens und Kotangens Dargestellte gilt nach den angeführten Lehrsätzen auf eine ähnliche Weise für die Sekans und Kosekans; für diese beiden letzten Linien ist die besondere Ausführung nicht nöthig, da sie unmittelbar in den trigonometrischen Tabellen nicht vorkommen, und man sie aus dem Kosinus und Sinus bestimmen kann, wie man in der Folge sehen wird.

7) Einige Mathematiker, wie z. B. der königl. preuß. Herr Oberforstrath G. F. Krause in seinem Handbuche der mathematischen Forstwissenschaften, führen nebst den erwähnten sieben trigonometrischen Linien noch eine achte, nämlich den Kosinusversus an, und verstehen darunter den Quersinus oder Sinusversus des Komplements.

II. Abschnitt.

Von den Verhältnissen trigonometrischer Linien zusammengesetzter Winkel oder Bögen für den Halbmesser 1.

---

§. 83.

I. Lehrsatz:

Man findet, wenn man den Halbmesser des Kreises der Zahl 1 gleich setzt, den Sinus von der Summe zweier Winkel oder Bögen, wenn man den Sinus eines jeden Winkels allemal mit dem Kosinus des anderen multiplizirt, und beide Produkte in eine Summe bringt; das ist, wenn a und b die einzelnen Winkel oder Bögen, und c ihre Summe bezeichnet,

$$\text{Sin.}\,c = \text{Sin.}\,(a+b) = \text{Sin.}\,a\,.\,\text{Cos.}\,b + \text{Sin.}\,b\,.\,\text{Cos.}\,a.$$

Beweis für den ersten Fall.

Wenn sowohl die einzelnen Winkel oder Bögen, als auch ihre Summe kleiner ist als 90 Grad.

1) Es seien (Fig. 29.) die Winkel BAC und CAD, und ihre Bögen BC und CD gegeben, indeß aber so, daß sowohl die Winkel und die Bögen, als auch ihre Summe, das ist, der Winkel BAD = BAC + CAD, und der Bogen BD = BC + CD im ersten Quadranten liegen.

2) Man bezeichne die beiden gegebenen Winkel mit a und b und ihre Summe mit c, und zeichne zu ihnen den Sinus und den Kosinus (§. 57 und 60.), es ist CE = Sin. BAC = Sin. BC = Sin. a, und AE = Cosin. BAC = Cosin. BC = Cosin. a, dann DF = Sin. CAD = Sin. CD = Sin. b, und AF = Cosin. CAD = Cosin. CD = Cosin. b, endlich DH = Sin. BAD = Sin. (BAC + CAD) = Sin. BD = Sin. (BC + CD) = Sin. c = Sin. (a + b), und AH = Cosin. BAD = Cosin. c = Cosin. (a + b);

3) Weil CE und DH als die Sinus ihrer Winkel auf dem Radius AB senkrecht stehen, so ist CE mit GH parallel (I. §. 38. Zus I.), also das Dreieck CEA ist dem Dreiecke GHA ähnlich (I. §. 91.), und das Dreieck GHA ist wegen der gleichen Scheitelwinkel bei G und der rechten Winkel bei H und F dem Dreiecke DFG ähnlich (I. §. 92. Zus.), weßhalb diese drei Dreiecke unter sich ähnlich sind, nämlich △ CEA ∽ △ GHA ∽ △ DFG;

4) Bei ähnlichen Dreiecken sind die homologen Seiten proportionirt, deßwegen verhält sich

$$AE : AC = DF : DG,$$ das ist,

$$\text{Cosin. } a : 1 = \text{Sin. } b : DG,$$

mithin ist $DG = \frac{\text{Sin. } b}{\text{Cosin. } a}$;

5) Ferner verhält sich

$$AE : CE = DF : GF,$$ das ist,

$$\text{Cosin. } a : \text{Sin. } a = \text{Sin. } b : GF,$$

und $GF = \frac{\text{Sin. } a \,.\, \text{Sin. } b}{\text{Cosin. } a}$;

6) Die Linie AG ist $= AF - GF = \text{Cosin. b} - \frac{\text{Sin. a . Sin. b}}{\text{Cosin. a}}$

$$= \frac{\text{Cosin. a . Cosin. b} - \text{Sin. a . Sin. b}}{\text{Cosin. a}};$$

7) Endlich verhält sich

$$AC : CE = AG : GH, \text{ das ist,}$$

$$1 : \text{Sin. a} = \frac{\text{Cosin. a . Cosin. b} - \text{Sin. a . Sin. b}}{\text{Cosin. a}} : GH;$$

$$\text{und } GH = \frac{\text{Sin. a . Cos. a . Cos. b} - \text{Sin. a}^2 \text{. Sin. b}}{\text{Cosin. a}};$$

8) Die Linie DH ist nach Nro. 2. der Sinus der Summe der beiden Winkel, und DH ist $= DG + GH$; wenn man nun nach Nro. 4. und 7. anstatt DG und GH die gleichen Werthe substituirt, so findet man, daß

$$\text{Sin. c} = \text{Sin. (a + b)} =$$

$$\text{Sin. b} + \frac{\text{Sin. a . Cosin. a . Cosin. b} - \text{Sin. a}^2 \text{. Sin. b}}{\text{Cosin. a}}$$

$$= \frac{\text{Sin. b. (1} - \text{Sin. a}^2) + \text{Sin. a . Cosin. a . Cosin. b}}{\text{Cosin. a}}$$

$$= \frac{\text{Sin. b . Cosin. a}^2 + \text{Sin. a . Cosin. a . Cosin. b}}{\text{Cosin. a}}$$

(§. 70. Nro. 1. und Arithm. III. §. 87. IV.)

$$= \text{Sin. b . Cosin. a} + \text{Sin. a . Cosin. b}$$

$$= \text{Sin. a . Cosin. b} + \text{Sin. b . Cosin. a}$$

Beweis für den zweiten Fall,

wenn zwar die einzelnen Bögen oder Winkel kleiner sind als 90 Grad, dagegen aber ihre Summe größer ist als 90 Grad.

1) Es seien (Fig. 30.) die Winkel BAC und CAD, oder die Bögen BC und CD gegeben, so daß BAC oder BC, und CAD oder CD < 90 Grad, und ihre Summe BAD = BAC + CAD, oder BD = BC + CD > 90 Grad;

2) Zeichnet man zu diesen Winkeln oder Bögen, die man wieder mit a, b und c anzeigt, den Sinus und den Kosinus, so ist CE = Sin. BAC = Sin. BC = Sin. a, und AE = Cosin. BAC = Cosin. BC = Cosin. a, dann DF = Sin. CAD = Sin. CD = Sin. b, und AF = Cosin. CAD = Cosin. CD = Cosin. b, endlich DH = Sin. BAD = Sin. BD = Sin. c = Sin. (a + b), und AH = Cosin. BAD = Cosin. BD = Cosin. c = Cosin. (a + b);

3) Man mache am Durchmesser Bb den Bogen bc = cG = 90° — BC, so ist, weil CG zu BC das Komplement ist (§. 59.),

ce = Sin. CG = Cosin. a, und

Ae = Cosin. CG = Sin. a (§. 60.);

da ferner bc = cD = 180° — BC — CD,

und bc = 90° — BC

so ist cD = 90° — CD;

mithin ist wieder Df = Cosin. CD = Cosin. b,

und Af = Sin. CD = Sin. b.

4) Aus den vorhin angeführten Gründen ist △ Dqf ∽ △ qAH ∽ △ cAe, daher verhält sich

Ae : Ac = Df : DQ, das ist,

Sin. a : 1 = Cosin. b : Dq, mithin

$$Dq = \frac{\text{Cosin. b}}{\text{Sin. a}};$$

5) ferner verhält sich

Ae : ce = Df : qf, das ist,

Sin. a : Cosin. a = Cosin. b : qf,

$$\text{also } qf = \frac{\text{Cosin. a . Cosin. b}}{\text{Sin. a}},$$

$$\text{und } Aq = Af - qf = \text{Sin. b} - \frac{\text{Cosin. a . Cosin. b}}{\text{Sin. a}}$$

$$= \frac{\text{Sin. a . Sin. b} - \text{Cosin. a . Cosin. b}}{\text{Sin. a}};$$

6) Endlich verhält sich

Ac : ce = Aq : qH, das ist,

$$1 : \text{Cosin. a} = \frac{\text{Sin. a . Sin. b} - \text{Cos. a . Cos. b}}{\text{Sin. a}} : qH,$$

folg-

folglich ist qH =

$$\frac{\text{Sin. a . Cosin. a . Sin. b} - \text{Cosin. a}^2 \text{. Cosin. b}}{\text{Sin. a}};$$

7) Wenn man nun die Werthe von Dq (Nro. 4.), und von qH (Nro. 6.) substituirt, so findet man, daß, da DH = Dq + qH = Sin. c = Sin. (a + b)

$$= \frac{\text{Cosin. b}}{\text{Sin. a}} + \frac{\text{Sin. a . Cosin. a . Sin. b} - \text{Cosin. a}^2 \text{. Cosin. b}}{\text{Sin. a}}$$

$$= \frac{\text{Cosin. b}(1 - \text{Cosin. a}^2) + \text{Sin. a . Cosin. a . Sin. b}}{\text{Sin. a}}$$

$$= \frac{\text{Cosin. b . Sin. a}^2 + \text{Sin. a . Cosin. a . Sin. b}}{\text{Sin. a}}$$

(§. 70. Zus. I. und Arithm. III. §. 87. IV.)
= Cosin. b . Sin. a + Cosin. a . Sin. b
= Sin. a . Cosin. b + Sin. b . Cosin. a; das heißt, man erhält auch in diesem Falle beim Halbmesser 1 den Sinus von der Summe zweier Winkel oder Bögen, wenn man den Sinus eines jeden Winkels allemal mit dem Kosinus des anderen multiplizirt, und beide Produkte in eine Summe bringt.

I. Zusatz: Setzt man a = b, und deßhalb c = a + a = 2a, so ist nach dem vorstehenden Lehrsatze Sin. 2a = Sin. a . Cosin. a + Sin. a . Cosin. a = 2 Sin. a . Cosin. a, da in dieser Voraussetzung Cosin. b = Cosin. a, und Sin. b = Sin. a.

II. Zusatz: Weil nach dem I. Zusatze 2 Sin. a . Cosin. a = Sin. 2a, so ist auch Sin. a . Cosin. a = ½ Sin. 2a.

Anmerkung: 1) Wenn man den Halbmesser des Kreises nicht geradezu der Zahl 1, sondern überhaupt r gleich setzt, so verwandelt sich die Formel des Lehrsatzes, wie man es aus dem beigefügten Beweise ersieht, aus Sin. c = Sin. (a + b) = Sin. a . Cosin. b + Cosin. a . Sin. b in die Formel Sin. c = Sin. (a + b) = (Sin. a . Cosin. b + Cosin. a . Sin. b) : r. Es ist aber bei der Entwickelung der Formeln bequemer, wenn man den Radius gleich 1 setzt, besonders da man die trigo-

nometrischen Linien für jeden beliebigen Halbmesser r sehr leicht berechnen kann, wenn man sie für den Halbmesser 1 weiß (§. 81. Zus. IV.).

2) Bei diesen Formeln wird die Multiplikation einfacher durch den Punkt (.) angezeigt, und deßhalb z. B. kürzer »Sin. a . Cosin. b« anstatt »Sin. a × Cosin. b« geschrieben.

3) Der Kürze wegen ist der Beweis des in diesem §. aufgestellten Lehrsatzes nur für die beiden erwähnten Fälle angeführt worden; indem die vollständige Deduktion der Beweise und die Konstruktion der Figuren für die übrigen Fälle zu weitläufig ist. Man nimmt nämlich bei diesen letzteren, wenn die gegebenen Winkel oder Bögen größer sind als 90 Grad, ihre spitzigen Komplemente, oder Supplemente, und verfährt dann indeß aber mit genauer Rücksicht auf die Zeichen der trigonometrischen Linien auf eine ähnliche Weise, wie es beim vorstehenden Beweise für den zweiten Fall geschehen ist. Diese Bemerkung gilt auch in Betreff der übrigen Lehrsätze, die in diesem Abschnitte vorkommen.

4) Wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt ist, so versteht es sich immerhin, daß der Halbmesser des Kreises gleich 1 gesetzt wird, wie dieses bei *allen* Formeln dieses Abschnittes nach seiner Aufschrift der Fall ist.

§. 84.

II. Lehrsatz:

Man findet den Sinus von der Differenz zweier Winkel oder Bögen, wenn man den Sinus des größeren Winkels mit dem Kosinus des kleineren, und den Kosinus des ersteren mit dem Sinus des letzteren multiplizirt, und das zweite Produkt vom ersten abzieht; das ist, wenn d die Differenz zweier Winkel oder Bögen, und a den größeren, b aber den kleineren Winkel bezeichnet,

$$\text{Sin. } d = \text{Sin. } (a - b)$$
$$= \text{Sin. } a \,.\, \text{Cosin. } b - \text{Cosin. } a \,.\, \text{Sin. } b.$$

Beweis:

1) Es sei (Fig. 29.) der Winkel BAD und BAC, oder der Bogen BD und BC gegeben, und CAD oder

CD ihre Differenz, das ist, CAD = BAD — BAC, und CD = BD — BC;

2) Für BAD oder BD = a ist DH = Sin. a, und AH = Cosin. a, dann für BAC oder BC = b ist CE = Sin. b, und AE = Cosin. b, endlich für CAD = BAD — BAC, oder für BD — BC = CD, also für d = a — b ist DF = Sin. d = Sin. (a — b);

3) Aus den im vorigen §. angeführten Gründen ist △ CEA ∽ △ GHA ∽ △ DFG, mithin AE : CE = AH : GH, das ist,

$$\text{Cosin. } b : \text{Sin. } b = \text{Cosin. } a : GH,$$ das ist,

$$GH = \frac{\text{Cosin. } a \,.\, \text{Sin. } b}{\text{Cosin. } b};$$

4) Die Linie DG = DH — GH = Sin. a — $\frac{\text{Cosin. } a \,.\, \text{Sin. } b}{\text{Cosin. } b}$

$$= \frac{\text{Sin. } a \,.\, \text{Cosin. } b - \text{Cosin. } a \,.\, \text{Sin. } b}{\text{Cosin. } b}.$$

5) Ferner verhält sich

AC : AE = DG : DF, das ist,

$$1 : \text{Cosin. } b = \frac{\text{Sin. } a \,.\, \text{Cos. } b - \text{Cos. } a \,.\, \text{Sin. } b}{\text{Cosin. } b} : \text{Sin. } d$$

(Nro. 2 und 4.), folglich Sin. d

$= \text{Sin. } (a - b) = \text{Sin. } a \,.\, \text{Cosin. } b - \text{Cosin. } a \,.\, \text{Sin. } b.$

I. Zusatz: Nach §. 83. und nach diesem Lehrsatze ist

$$\text{Sin. } (a + b) = \text{Sin. } a \,.\, \text{Cosin. } b + \text{Cosin. } a \,.\, \text{Sin. } b,$$
$$\text{Sin. } (a - b) = \text{Sin. } a \,.\, \text{Cosin. } b - \text{Cosin. } a \,.\, \text{Sin. } b,$$

also ist, wenn man beide Gleichungen addirt, und von einander subtrahirt, Sin. (a + b) + Sin. (a — b) = 2 Sin. a . Cosin. b, und Sin. (a + b) — Sin. (a — b) = 2 Cosin. a . Sin. b.

II. Zusatz: Nach diesen nämlichen Lehrsätzen ist auch, wenn a den größeren Winkel bezeichnet,

$$\text{Sin. } (a \pm b) = \text{Sin. } a \,.\, \text{Cosin. } b \pm \text{Cosin. } a \,.\, \text{Sin. } b,$$

wo das obere Zeichen (+) für die Summe, und das

untere Zeichen (—) für die Differenz der gegebenen Winkel oder Bögen genommen wird.

§. 85.

III. Lehrsatz:

Man findet den Kosinus von der Summe zweier Winkel oder Bögen, wenn man vom Produkte ihrer Kosinus das Produkt der Sinus dieser nämlichen zwei Winkel abzieht; das ist,

$$\text{Cosin. } c = \text{Cosin. } (a + b)$$
$$= \text{Cosin. } a \,.\, \text{Cosin. } b - \text{Sin. } a \,.\, \text{Sin. } b.$$

Beweis:

1) Es sei (Fig. 29.) der Winkel BAC oder der Bogen BC, und der Winkel CAD oder CD gegeben, so daß BAC + CAD = BAD, und BC + CD = BD;

2) Für den Winkel BAC oder den Bogen BC = a ist CE der Sinus, und AE der Kosinus, das ist, CE = Sin. a, und AE = Cosin. a.

Für den Winkel CAD oder den Bogen CD = b ist DF der Sinus, und AF der Kosinus, das ist, DF = Sin. b, und AE = Cosin. b.

Und für die Summe dieser Winkel oder Bögen, also für BAD oder BD = c ist DH der Sinus, und AH der Kosinus, das ist, DH = Sin. c = Sin. (a + b), und AH = Cosin. c = Cosin. (a + b);

3) Weil △ EAC ∽ △ GHA ∽ △ DFG, so verhält sich AE : CE = DF : FG, das ist, Cosin. a : Sin. a = Sin. b : FG, also $FG = \frac{\text{Sin. } a \,.\, \text{Sin. } b}{\text{Cosin. } a}$;

4) Dann ist $AG = AF - FG = \text{Cosin. } b - \frac{\text{Sin. } a \,.\, \text{Sin. } b}{\text{Cosin. } a} = \frac{\text{Cosin. } a \,.\, \text{Cosin. } b - \text{Sin. } a \,.\, \text{Sin. } b}{\text{Cosin. } a}$;

Ferner verhält sich

AC : AE = AG : AH, das ist,

$$1 : \text{Cosin. } a = \frac{\text{Cos. } a \,.\, \text{Cos. } b - \text{Sin. } a \,.\, \text{Sin. } b}{\text{Cosin. } a} : AH,$$

folglich ist $AH = \text{Cosin. } c = \text{Cosin. } (a + b) = \text{Cosin. } a \,.\, \text{Cosin. } b - \text{Sin. } a \,.\, \text{Sin. } b.$

I. Zusatz: Setzt man $a = b$, so ist $\text{Sin. } a = \text{Sin. } b$, und $\text{Cosin. } a = \text{Cosin. } b$, also $\text{Cosin. } (a + b) = \text{Cosin. } 2a = \text{Cosin. } a \,.\, \text{Cosin. } a - \text{Sin. } a \,.\, \text{Sin. } a = \text{Cosin. } a^2 - \text{Sin. } a^2$.

II. Zusatz: Weil $\text{Cosin. } a^2 = r^2 - \text{Sin. } a^2 = 1 - \text{Sin. } a^2$, und $\text{Sin. } a^2 = r^2 - \text{Cosin. } a^2$, $= 1 - \text{Cosin. } a^2$ (§. 70.), so ist nach dem vorigen Zusatze auch

$$\text{Cosin } 2a = 1 - \text{Sin. } a^2 - \text{Sin. } a^2$$
$$= 1 - 2 \text{ Sin. } a^2,$$

und $\text{Cosin. } 2a = \text{Cosin. } a^2 - (1 - \text{Cosin. } a^2)$
$$= 2 \text{ Cosin. } a^2 - 1.$$

III. Zusatz: In den zwei Gleichungen des II. Zusatzes kann man die Werthe von Sin. a und Cosin. a ausdrücken (Arithm. IV. §. 20.), es ist

$\text{Cosin. } 2a = 1 - 2 \text{ Sin. } a^2$, also

$\text{Sin. } a = \sqrt{\left(\frac{1 - \text{Cosin. } 2a}{2}\right)}$, ferner

$\text{Cosin. } 2a = 2 \text{ Cosin. } a^2 - 1$, mithin

$$\text{Cosin. } a = \sqrt{\left(\frac{1 + \text{Cosin. } 2a}{2}\right)}.$$

IV. Zusatz: Weil der Radius r gleich 1 angenommen ist, und $\text{Tang. } a = \frac{r \,.\, \text{Sin. } a}{\text{Cosin. } a}$ (§. 76.), mithin nach dieser Annahme $\text{Tang. } a = \frac{\text{Sin. } a}{\text{Cosin. } a}$, so ist nach dem vorigen Zusatze, wenn man anstatt Sin. a und Cosin a die gleichen Werthe setzt,

$$\text{Tang. } a = \sqrt{\left(\frac{1 - \text{Cosin. } 2a}{1 + \text{Cosin. } 2a}\right)}.$$

V. Zusatz: Setzt man im zweiten Zusatze anstatt 2a den Winkel oder Bogen g, so ist $a = \frac{1}{2} g$, dann $\text{Sin. } a = \text{Sin. } \frac{1}{2} g$, und $(\text{Sin. } a)^2 = (\text{Sin. } \frac{1}{2} g)^2$,

oder auch, wie man kürzer schreibt (§. 70. Anmerk.), $\sin a^2 = \sin \frac{1}{2} g^2$, was sich eben so rücksichtlich des Kosinus verhält.

Daraus folgt nun nach dem erwähnten Zusatze, daß $\cos g = 1 - 2 \sin \frac{1}{2} g^2$, wie auch, daß $\cos g = 2 \cos \frac{1}{2} g^2 - 1$.

VI. Zusatz: Eben so folgt aus dem III. Zusatze, wenn man die vorige Substitution vornimmt, daß

$$\sin \tfrac{1}{2} g = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos g}{2}\right)}, \text{ und}$$

$$\cos \tfrac{1}{2} g = \sqrt{\left(\frac{1 + \cos g}{2}\right)}.$$

Auf diese Weise folgt auch nach dem IV. Zusatze, daß

$$\text{Tang. } \tfrac{1}{2} g = \frac{\sin \frac{1}{2} g}{\cos \frac{1}{2} g} = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos g}{1 + \cos g}\right)}.$$

VII. Zusatz: Der Sinus eines dreifachen Winkels oder Bogens, oder $\sin 3a$ ist $= 3 \sin a \cdot \cos a^2 - \sin a^3$.

Denn setzt man in der Gleichung $\sin c = \sin (a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$ (§. 83.) den Winkel oder Bogen $b = 2a$, so ist $c = a + 2a = 3a$, und $\sin 3a = \sin a \cdot \cos 2a + \cos a \cdot \sin 2a = \sin a (\cos a^2 - \sin a^2) + \cos a (2 \sin a \cdot \cos a)$

(§. 85. Zus. I. und §. 83. Zus. I.)

$= \sin a \cdot \cos a^2 - \sin a^3 + 2 \cos a^2 \cdot \sin a$
$= 3 \sin a \cdot \cos a^2 - \sin a^3$.

VIII. Zusatz: Der Kosinus des dreifachen Winkels oder Bogens, oder $\cos 3a = \cos a^3 - 3 \cos a \cdot \sin a^2$.

Denn setzt man im Lehrsatze dieses §. bei $\cos c = \cos (a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$ den Winkel oder Bogen $b = 2a$, so ist $\cos c = \cos (a + 2a)$, mithin

$\cos 3a = \cos a \cdot \cos 2a - \sin a \cdot \sin 2a$
$= \cos a (\cos a^2 - \sin a^2) - \sin a (2 \sin a \cdot \cos a)$

(§. 85. Zus. I. und §. 83. Zus. I.)

$= \cos a^3 - \cos a \cdot \sin a^2 - 2 \cos a \cdot \sin a^2$
$= \cos a^3 - 3 \cos a \cdot \sin a^2$.

IX. Zusatz: Setzt man $b = 3a$, dann ist $a + b = 4a$, und $Sin.\ 4a = 4\ Sin.\ a\ .\ Cosin.\ a^3 - 4\ Cosin.\ a\ .\ Sin.\ a^3$.

Denn nach dem angeführten Lehrsatze ist

$$Sin.\ (a + 3a) = Sin.\ 4a = Sin.\ a\ .\ Cosin.\ 3a + Cosin.\ a\ .\ Sin.\ 3a$$

$$= Sin.\ a\ (Cosin.\ a^3 - 3\ Cosin.\ a\ .\ Sin.\ a^2) + Cosin.\ a\ (3\ Sin.\ a\ .\ Cosin.\ a^2 - Sin.\ a^3)$$ (Zus. VII. und VIII.)

$$= Sin.\ a\ .\ Cosin.\ a^3 - 3\ Sin.\ a^3\ .\ Cosin.\ a + 3\ Sin.\ a\ Cosin.\ a^3 - Sin.\ a^3\ .\ Cosin.\ a$$

$$= 4\ Sin.\ a\ .\ Cosin.\ a^3 - 4\ Sin.\ a^3\ .\ Cosin.\ a.$$

X. Zusatz: Eben so findet man den Kosinus des vierfachen Winkels oder Bogens; es ist,

$$Cosin.\ 4a = Cosin.\ a^4 - 6\ Sin.\ a^2\ .\ Cosin.\ a^2 + Sin.\ a^4.$$

Denn nach dem erwähnten Lehrsatze ist

$$Cosin.\ (a + 3a) = Cosin.\ 4a = Cosin.\ a\ .\ Cosin.\ 3a - Sin.\ a\ .\ Sin.\ 3a$$

$$= Cosin.\ a\ (Cosin.\ a^3 - 3\ Cosin.\ a\ .\ Sin.\ a^2) - Sin.\ a\ (3\ Sin.\ a\ .\ Cosin.\ a^2 - Sin.\ a^3)$$

(Zus. VII. und VIII.)

$$= Cosin.\ a^4 - 3\ Cosin.\ a^2\ .\ Sin.\ a^2 - 3\ Cosin.\ a^2\ .\ Sin.\ a^2 + Sin.\ a^4$$

$$= Cosin.\ a^4 - 6\ Sin.\ a^2\ .\ Cosin.\ a^2 + Sin.\ a^4.$$

XI. Zusatz: Auf diese Weise kann man die Substitution immer fortsetzen, um für jeden folgenden mehrfachen Winkel oder Bogen den Sinus und Kosinus zu bestimmen. Da der Sinus und Kosinus nach dem IX. und X. Zusatze vom vierfachen Winkel oder Bogen bekannt ist, so findet man für den fünffachen Winkel, daß

$$Sin.\ 5a = 5\ Cosin.\ a^4\ .\ Sin.\ a - 10\ Cosin.\ a^2\ .\ Sin.\ a^3 + Sin.\ a^5,$$ wie auch, daß,

$$Cosin.\ 5a = Cosin.\ a^5 - 10\ Cosin.\ a^3\ .\ Sin.\ a^2 + 5\ Cosin.\ a\ .\ Sin.\ a^4.$$

XII. Zusatz: Die Tangens von $45^\circ + a$, oder $Tang.\ (45^\circ + a)$ ist $= \dfrac{Cosin.\ a + Sin.\ a}{Cosin.\ a - Sin.\ a}$.

Denn nach dem im §. 83. aufgestellten Lehrsatze ist $Sin. (45^{o} + a) = Sin. 45^{o} . Cosin. a + Cosin. 45^{o} . Sin. a = Sin. 45^{o} (Cosin. a + Sin. a)$, weil $Sin. 45^{o} = Cosin. 45^{o}$ (§. 66.); dann nach §. 85. ist $Cosin (45^{o} + a) = Cosin. 45^{o} . Cosin. a - Sin. 45^{o} . Sin. a = Cosin. 45^{o} (Cosin. a - Sin. a)$, mithin, wenn man Gleiches mit Gleichem dividirt,

$$\frac{Sin. (45^{o} + a)}{Cosin. (45^{o} + a)} = \frac{Cosin. a + Sin. a}{Cosin. a - Sin. a};$$

nun ist aber $\frac{Sin. (45^{o} + a)}{Cosin. (45^{o} + a)} = Tang. (45 + a)$ (§.76.), aber ist $Tang. (45^{o} + a) = \frac{Cosin. a + Sin. a}{Cosin. a - Sin. a}$.

XIII. Zusatz: Der Quersinus eines Winkels oder Bogens ist beim Halbmesser 1 dem doppelten Quadrate vom Sinus des nämlichen halben Winkels gleich, das ist, wenn man den Winkel mit g bezeichnet, $Sinv. g = 2 Sin. \frac{1}{2}g^{2}$.

Denn nach §. 72. ist $Sinv. g = r - Cosin. g = 1 - Cosin. g$, mithin nach dem V. Zusatze dieses §., wenn man anstatt Cosin. a den gleichen Werth substituirt, $Sinv. g = 1 - (1 - 2 Sin. \frac{1}{2}g^{2}) = 1 - 1 + 2 Sin. \frac{1}{2}g^{2} = 2 Sin. \frac{1}{2}g^{2}$.

Anmerkung: 1) Wenn man anstatt 1 den Halbmesser r annimmt, so ist nach der dem §. 83. beigefügten ersten Anmerkung $Sinv. g = \frac{2 Sin. \frac{1}{2} g^{2}}{r}$.

2) Wenn man nach den Gesetzen des binomischen Lehrsatzes (Arithm. IV. §. 84 und 85.) die zweitheilige Größe Cosin. a + Sin. a zur zweiten, dritten ꝛc. und überhaupt zur nten Potenz erhebt, so geben die Glieder dieser Potenzen, wenn man dieselben der Ordnung nach anschreibt, die Formeln, nach welchen man den Kosinus und den Sinus der mehrfachen Winkel oder Bögen berechnen kann; man muß aber dafür die Glieder mit Abwechslung der Zeichen + und — setzen, und für den Kosinus allemal das erste, dritte, fünfte ꝛc., für den Sinus aber das zweite, vierte, sechste ꝛc. Glied nehmen; man wird dadurch die nämlichen Formeln er-

halten, die bisher über die vielfachen Winkel oder Bögen aufgestellt wurden.

Denn nach dem binomischen Lehrsatze ist

$(Cosin.\ a + Sin.\ a)^2 = Cosin.\ a^2 + 2\ Cosin.\ a\ .\ Sin.\ a + Sin.\ a^2$;

also $Cosin.\ 2a = Cosin.\ a^2 - Sin.\ a^2$ (§. 85. Zus. I.),
und $Sin.\ 2a = 2\ Cosin.\ a\ .\ Sin.\ a$ (§. 83. Zus. I.).

Dann $(Cosin.\ a + Sin.\ a)^3 = Cosin.\ a^3 + 3\ Cosin.\ a^2\ .\ Sin.\ a + 3\ Cosin.\ a\ .\ Sin.\ a^2 + Sin.\ a^3$;

also $Cosin.\ 3a = Cosin.\ a^3 - 3\ Cosin.\ a\ .\ Sin.\ a^2$ (§. 85. Zus. VIII.)
und $Sin.\ 3a = 3\ Cosin.\ a^2\ .\ Sin.\ a - Sin.\ a^3$ (§.85. Zus.VII.).

Ferner $(Cosin.\ a + Sin.\ a)^4 = Cosin.\ a^4 + 4\ Cosin.\ a^3\ .\ Sin.\ a + 6\ Cosin.\ a^2\ .\ Sin.\ a^2 + 4\ Cosin.\ a\ .\ Sin.\ a^3 + Sin.\ a^4$;

also $Cosin.\ 4a = Cosin.\ a^4 - 6\ Cosin.\ a^2\ .\ Sin.\ a^2 + Sin.\ a^4$, (§. 85. Zus. X.),
und $Sin.\ 4a = 4\ Cosin.\ a^3\ .\ Sin.\ a - 4\ Cosin.\ a\ .\ Sin.\ a^3$, (§. 85. Zus. IX.), u. s. f.

Erhebt man die Summe des Kosinus und Sinus, somit $Cosin.\ a + Sin.\ a$, zur nten Würde, so ist

$$(Cosin.\ a + Sin.\ a)^n = Cosin.\ a^n + \frac{n}{1} Cosin.\ a^{n-1}\ Sin.\ a + \frac{n(n-1)}{1\ .\ 2} Cosin.\ a^{n-2}\ Sin.\ a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\ .2\ .3} Cosin.\ a^3\ .\ Sin.\ a^3 + \ldots\ldots$$

und daraus folgt nach dem XI. Zusatze dieses §. daß

$$Cosin.\ n\ .a = Cosin.\ a^n - \frac{n(n-1)}{1\ .\ 2} Cosin.\ a^{n-2}\ Sin.\ a^2 + \ldots$$

$$\text{und } Sin.\ n\ .\ a = \frac{n}{1} Cosin.\ a^{n-1}\ .\ Sin.\ a - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\ .2\ .3} \times Cosin.\ a^{n-3}\ .\ Sin.\ a^3 + \ldots\ldots$$

3) Ich habe der Kürze wegen den ausführlichen Beweis für die Giltigkeit dieser Formeln zur Berechnung des Kosinus und Sinus nfacher Winkel oder Bögen überhaupt nicht mehr beigefügt, und mich deßhalb nur auf den XI. Zusatz dieses §. berufen; für die zwei-, drei- und vierfachen Winkel oder Bögen wurde die Wahrheit der angegebenen Formeln aus den aufgestellten Lehrsätzen in den angeführten Zusätzen bewiesen.

§. 86.

IV. Lehrsatz:

Man erhält den Kosinus von der Differenz zweier Winkel oder Bögen, wenn man zum Produkte der Kosinus der gegebenen Winkel das Produkt ihrer Sinus addirt; das ist,

$$\text{Cosin. d} = \text{Cosin. } (a - b) = \text{Cosin. a . Cosin. b} + \text{Sin. a . Sin. b.}$$

Beweis:

1) Es sei (Fig. 29.) der Winkel BAD oder der Bogen BD = a, und der Winkel BAC oder der Bogen BC = b gegeben, so daß BAD — BAC = CAD = d, oder BD — BC = CD = d = a — b;

2) Für BAD oder BD ist DH der Sinus, und AH der Kosinus, das ist, DH = Sin. a, und AH = Cosin. a.

Dann für BAC oder BC ist CE der Sinus und AE der Kosinus, das ist, CE = Sin. b, und AE Cosin. b, und für CAD oder CD ist DF der Sinus und AF der Kosinus, das heißt, AF = Cosin. d = Cosin. (a — b), und DF = Sin. d = Sin. (a — b).

3) Wegen der bekannten Aehnlichkeit der Dreiecke verhält sich

$$AE : AC = AH : AG, \text{ das ist,}$$
$$\text{Cosin. b} : 1 = \text{Cosin. a} : AG, \text{ und}$$
$$AG = \frac{\text{Cosin. a}}{\text{Cosin. b}};$$

4) Ferner verhält sich

$$AE : CE = AH : GH, \text{ oder}$$
$$\text{Cosin. b} : \text{Sin. b} = \text{Cosin. a} : GH, \text{ also}$$
$$GH = \frac{\text{Sin. b . Cosin. a}}{\text{Cosin. b}}, \text{ und}$$
$$DG = DH - GH = \text{Sin. a} - \frac{\text{Sin. b . Cosin. a}}{\text{Cosin. b}}$$
$$= \frac{\text{Sin. a . Cosin. b} - \text{Sin. b . Cosin. a}}{\text{Cosin. b}};$$

5) Endlich verhält sich
AC : CE = DG : FG, das ist,

$$1 : \text{Sin. } b = \frac{\text{Sin. } a \,.\, \text{Cosin. } b - \text{Sin. } b \,.\, \text{Cosin. } a}{\text{Cosin. } b} : FG,$$

$$\text{also } FG = \frac{\text{Sin. } a \,.\, \text{Sin. } b \,.\, \text{Cosin. } b - \text{Sin. } b^2 \,.\, \text{Cosin. } a}{\text{Cosin. } b};$$

6) Setzt man nach Nro. 3 und 5. für AG und GF die gleichen Werthe, so findet man, daß AG + GF, oder

$$AF = \text{Cosin. } d = \text{Cosin. } (a - b) = \frac{\text{Cosin. } a}{\text{Cosin. } b}$$

$$+ \frac{\text{Sin. } a \,.\, \text{Sin. } b \,.\, \text{Cosin. } b - \text{Sin. } b^2 \,.\, \text{Cosin. } a}{\text{Cosin. } b}$$

$$= \frac{\text{Cosin. } a\,(1 - \text{Sin. } b^2) + \text{Sin. } a \,.\, \text{Sin. } b \,.\, \text{Cosin. } b}{\text{Cosin. } b}$$

$$= \frac{\text{Cosin. } a \,.\, \text{Cosin. } b^2 + \text{Sin. } a \,.\, \text{Sin. } b \,.\, \text{Cosin. } b}{\text{Cosin. } b}$$

(§. 70. Nro. 1.)

$$= \text{Cosin. } a \,.\, \text{Cosin. } b + \text{Sin. } a \,.\, \text{Sin. } b.$$

I. Zusatz; Wenn a und b zwei Winkel oder Bögen bezeichnen, und zwar a den größeren, und b den kleineren, so ist nach diesem Lehrsatze, und nach dem Lehrsatze des §. 85.

$$\text{Cosin. } (a - b) = \text{Cosin. } a \,.\, \text{Cosin. } b + \text{Sin. } a \,.\, \text{Sin. } b,$$

und $\text{Cosin. } (a + b) = \text{Cos. } a \,.\, \text{Cos. } b - \text{Sin. } a \,.\, \text{Sin. } b,$

folglich ist

$$\text{Cosin. } (a - b) + \text{Cosin. } (a + b) = 2\,\text{Cos. } a \,.\, \text{Cos. } b$$

und $\text{Cosin. } (a - b) - \text{Cosin. } (a + b) = 2\,\text{Sin. } a \,.\, \text{Sin. } b.$

II. Zusatz: $\text{Sin. } a \,.\, \text{Sin. } (a + b) + \text{Cosin. } a \,.\, \text{Cosin. } (a + b) = \text{Cosin. } b.$

Denn nach §. 83. und 85. ist

$$\text{Sin. } a \,.\, \text{Sin. } (a + b) = \text{Sin. } a\,(\text{Sin. } a \,.\, \text{Cosin. } b + \text{Cosin. } a \,.\, \text{Sin. } b) = \text{Sin. } a^2 \,.\, \text{Cosin. } b + \text{Sin. } a \,.\, \text{Cosin. } a \,.\, \text{Sin. } b,$$

und $\text{Cosin. } a \,.\, \text{Cosin. } (a + b) = \text{Cosin. } a \,.\, (\text{Cosin. } a \,.\, \text{Cosin. } b - \text{Sin. } a \,.\, \text{Sin. } b) = \text{Cosin. } a^2 \,.\, \text{Cosin. } b - \text{Sin. } a \,.\, \text{Cosin. } a \,.\, \text{Sin. } b;$

also $\text{Sin. a} . \text{Sin.} (a + b) + \text{Cosin. a} . \text{Cosin.} (a + b)$
$= \text{Sin. a}^2 . \text{Cosin. b} + \text{Cosin. a}^2 . \text{Cosin. b}$
$= (\text{Sin. a}^2 + \text{Cosin. a}^2) \text{Cosin. b} = \text{Cosin. b}$,
da $\text{Sin. a}^2 + \text{Cosin. a}^2 = r^2 = 1$ ist (§. 70. Zus. I.).

III. Zusatz: $\text{Cosin. a} . \text{Sin.} (a + b) - \text{Sin. a} . \text{Cosin.} (a + b) = \text{Sin. b}$.

Denn nach §. 83 und 85. ist
$\text{Cosin. a} . \text{Sin.} (a + b) = \text{Cosin. a} (\text{Sin. a} . \text{Cosin. b} + \text{Cosin. a} . \text{Sin. b}) = \text{Cosin. a} . \text{Sin. a} . \text{Cosin. b} + \text{cosin. a}^2 . \text{Sin. b}$, und
$\text{Sin. a} . \text{Cosin.} (a + b) = \text{Sin. a} (\text{Cosin. a} . \text{Cosin. b} - \text{Sin. a} . \text{Sin. b}) = \text{Sin. a} . \text{Cosin. a} . \text{Cosin. b} - \text{Sin. a}^2 \text{Sin. b}$, folglich ist,
$\text{Cosin. a} . \text{Sin} (a + b) - \text{Sin. a} . \text{Cosin.} (a + b)$
$= \text{Cosin. a}^2 . \text{Sin. b} + \text{Sin. a}^2 . \text{Sin. b}$
$= \text{Sin. b} (\text{Cosin. a}^2 + \text{Sin. a}^2) = \text{Sin. b}$,
da $\text{Cosin. a}^2 + \text{Sin. a}^2 = r^2 = 1$.

IV. Zusatz: Wenn a den größeren der beiden gegebenen Winkel bezeichnet, und der kleinere durch b ausgedrückt wird, so ist nach dem Lehrsatze dieses §., und nach §. 85.

$$\text{Cosin.} (a \pm b) = \text{Cosin. a} . \text{Cosin. b} \mp \text{Sin. a} . \text{Sin. b}.$$

V. Zusatz: Wenn der Winkel a stumpf, und b sowohl als auch a — b oder d spitzig ist, so ist Cosin. a negativ (§. 71.), und deßhalb

$$\text{Cosin.} (a - b) = - \text{Cosin. a} . \text{Cosin. b} + \text{Sin. a} . \text{Sin. b}.$$

Denn bezeichnet m das Komplement zu a, und n das zu b, so ist

$$a - m = 90 \text{ Grad},$$
und $b + n = 90$ Grad (§. 59.),

also $a - b - (m + n) = 0$, mithin
$a - b = m + n$, und die Summe von $m + n$ ist spitzig, und es ist $\text{Cosin.} (a - b) = \text{Cosin.} (m + n)$ (§. 67. Zus.)

Ferner ist nach dem Lehrsatze des §. 85.
$\text{Cosin.} (m + n) = \text{Cosin. m} . \text{Cosin. n} - \text{Sin. m} . \text{Sin. n}$
$= \text{Sin. a} . \text{Sin. b} - \text{Cosin. a} . \text{Cosin. b}$,

folglich $Cos.(a-b) = -Cos.a.Cos.b + Sin.a.Sin.b$, indem $Cosin.m. = Sin.a$, $Cosin.n = Sin.b$ ꝛc.

Anmerkung: 1) Man sieht leicht ein, daß man auf eine ähnliche Art, wie es hier im V. Zusatze und im zweiten Beweise des §. 83. geschehen ist, für die Summe oder Differenz zweier Winkel den Sinus oder Kosinus bestimmen kann, im Falle die einzelnen Winkel und ihre Summe größer ist als 90 Grad; man setzt nämlich anstatt solcher Winkel ihre Komplemente und Supplemente, die allemal spitzig sind, und nimmt dabei auf die Zeichen der trigonometrischen Linien die geeignete Rücksicht (§. 83. Anmerk. 3).

2) Bei Winkeln oder Bögen, die größer sind als 90 Grad, ändern sich in Betreff der Zeichen die für den ersten Quadranten aufgestellten Formeln.

Ist demnach z. B. der Winkel a stumpf, b spitzig, und ihre Summe oder a + b ebenfalls stumpf, so ist Cosin. a negativ (§. 71.), also nach §. 83 und 85.

$Sin.(a + b) = Sin.a.Cosin.b - Cosin.a.Sin.b$,

und $Cosin.(a+b) = -Cosin.a.Cosin.b - Sin.a.Sin.b$.

Wenn a sowohl als b stumpf ist, und ihre Summe zwischen 180° und 270°, also im dritten Quadranten liegt, so ist der Kosinus von a und von b negativ (§. 71.), also

$Sin.(a + b) = -Sin.a.Cosin.b - Cosin.a.Sin.b$

$Cosin.(a + b) = Cosin.a.Cosin.b - Sin.a.Sin.b$.

Ist a im dritten Quadranten, dann b spitzig, und a — b stumpf, so ist von a der Sinus und der Kosinus negativ (§. 66 und 71.), weßhalb nach §. 84 und 86.

$Sin.(a - b) = -Sin.a.Cosin.b + Cosin.a.Sin.b$

und $Cosin.(a-b) = -Cosin.a.Cosin.b - Sin.a.Sin.b$.

Und eben so verhält es sich rücksichtlich dieser Formeln bei den übrigen Winkeln oder Bögen, wenn sie größer sind als 90 Grad.

§. 87.

V. Lehrsatz:

Man erhält die Tangens von der Summe zweier Winkel, wenn man die Summe der Tangenten beider Winkel durch die Differenz von 1 und

dem Produkte der Tangenten eben dieser Winkel dividirt; das ist,

$$\text{Tang.}\ (a + b) = \frac{\text{Tang. } a + \text{Tang. } b}{1 - \text{Tang. } a.\ \text{Tang. } b}.$$

Beweis:

1) Nach dem im §. 76. aufgestellten Lehrsatze ist, weil $r = 1$,

$$\text{Tang.}\ (a + b) = \frac{\text{Sin. } (a + b)}{\text{Cosin. } (a + b)}$$

$$= \frac{\text{Sin. a. Cosin. b} + \text{Cosin. a. Sin. b}}{\text{Cosin. a. Cosin. b} - \text{Sin. a. Sin. b}}$$
(§. 83 und §. 85.)

2) Man dividire den Zähler und den Nenner des letzten Bruches (Arithm. III. §. 66. d.) mit Cosin. a. Cosin. b, es ist

$$(\text{Sin.a. Cosin. b} + \text{Cosin.a. Sin.b}) : \text{Cosin.a. Cosin.b}$$
$$= \frac{\text{Sin. a}}{\text{Cosin. a}} + \frac{\text{Sin. b}}{\text{Cosin. b}} = \text{Tang.a.} + \text{Tang.b},$$

da hier der Radius oder $r = 1$ ist (§. 76.), ferner ist

$$(\text{Cosin.a. Cosin.b} - \text{Sin. a. Sin.b}) : \text{Cosin .a. Cosin. b}$$
$$= 1 - \frac{\text{Sin. a. Sin. b}}{\text{Cosin a. Cosin. b}} = 1 - \frac{\text{Sin. a}}{\text{Cosin. b}}$$
$$\times \frac{\text{Sin. b}}{\text{Cosin. b}} = 1 - \text{Tang. a. Tang. b},$$

folglich ist

$$\text{Tang.}\ (a + b) = \frac{\text{Tang. a} + \text{Tang. b}}{1 - \text{Tang. a. Tang. b}}.$$

I. Zusatz: Setzt man $a = b$, so ist Tang. a = Tang. b, weßhalb

$$\text{Tang. } 2a = \frac{\text{Tang. a} + \text{Tang. a}}{1 - \text{Tang. a. Tang. a}} = \frac{2\ \text{Tang. a}}{1 - \text{Tang. a}^2}.$$

II. Zusatz: Da hier der Radius gleich 1 ist, und nach §. 79. die $\text{Cot. A} = \frac{r^2}{\text{Tang. A}} = \frac{1}{\text{Tang. A}}$,

so ist $Cot. (a + b) = \frac{1}{Tang. (a + b)} =$

$1 : \left(\frac{Tang. a + Tang. b}{1 - Tang. a. Tang. b}\right) = \frac{1 - Tang. a. Tang. b}{Tang. a. + Tang. b}$.

III. Zusatz: Aus dem nämlichen Grunde ist $Cot. 2a = \frac{1}{Tang 2a}$, mithin $Cot. 2a = 1 : \left(\frac{2 Tang. a}{1 - Tang. a^2}\right)$ $= \frac{1 - Tang. a^2}{2 Tang. a}$.

§. 88.

VI. Lehrsatz:

Man erhält die Tangens von der Differenz zweier Winkel oder Bögen, wenn man die Differenz der Tangenten dieser Winkel durch die Summe von der Zahl 1 und dem Produkte dieser Tangenten dividirt, das ist, wenn a den größeren, und b den kleineren Winkel bezeichnet,

$$Tang. (a - b) = \frac{Tang. a - Tang. b}{1 + Tang. a. Tang. b}.$$

Beweis:

1) Nach §. 76. ist, weil der Radius gleich 1 gesetzt ist,

$$Tang. (a - b) = \frac{Sin. (a - b)}{Cosin. (a - b)} =$$

$$\frac{Sin. a. Cosin. b - Cosin. a. Sin. b}{Cosin. a. Cosin. b + Sin. a. Sin. b};$$

2) Wenn man nun, wie vorhin, den Zähler und Nenner dieses Bruches mit $Cosin. a. Cosin. b.$ dividirt, so wird der Zähler gleich $\frac{Sin. a}{Cosin. a} - \frac{Sin. b}{Cosin. b}$,

und der Nenner wird gleich $1 + \frac{Sin.\ a}{Cosin.\ a} \times \frac{Sin.\ b}{Cosin.\ b}$, weßhalb, wenn man Tang. a anstatt $\frac{Sin.\ a}{Cosin.\ a}$, und Tang. b anstatt $\frac{Sin.\ b}{Cosin.\ b}$ substituirt,

$$Tang.\ (a - b) = \frac{Tang.\ a - Tang.\ b}{1 + Tang.\ a.\ Tang.\ b}.$$

Zusatz: Weil aus dem vorhin angeführten Grunde wegen des als 1 angenommenen Radius $Cot.\ A = \frac{1}{Tang.\ A}$ (§. 79.), so ist $Cot.\ (a - b) = \frac{1}{Tang.\ (a - b)}$ $= 1 : \left(\frac{Tang.\ a - Tang.\ b}{1 + Tang.\ a.\ Tang.\ b}\right) = \frac{1 + Tang.\ a.\ Tang.\ b}{Tang.\ a - Tang.\ b}$.

Anmerkung: 1) Wenn man bei a + b die Größe 2a anstatt b, dann 3a anstatt b, und so fortgesetzt, substituirt, so erhält man auf eine ähnliche Weise, wie beim Sinus und Kosinus (§. 85.), die Tangens und Kotangens für die vielfachen Winkel, nämlich für 3a, für 4a, und so fortgesetzt.

2) Da sich, wie es schon bemerkt wurde, nach §. 77 und §. 80. aus dem Kosinus und Sinus die Sekans und Kosekans bestimmen läßt, so werden für die Sekanten und Kosekanten zusammengesetzter und vielfacher Winkel oder Bögen keine besondern Formeln aufgestellt.

§. 89.

VII. Lehrsatz:

Man findet die Tangens eines einfachen Winkels oder Bogens aus dem bekannten doppelten Winkel, wenn man entweder

I. Die Tangens des doppelten Winkels mit der Summe aus 1 und der Sekans des nämlichen zweifachen Winkels dividirt; oder

II. wenn man die Differenz von der Sekans des doppelten Winkels und von 1 mit der Tan=

Tangens dieses nämlichen zweifachen Winkels dividirt; das ist,

$$\text{I. Tang. a} = \frac{\text{Tang. 2a}}{\text{Sec. 2a} + 1}, \text{ und}$$

$$\text{II. Tang. a} = \frac{\text{Sec. 2a} + 1}{\text{Tang. 2a}}.$$

Beweis für die erste Formel.

1) Nach §. 77. ist $\text{Sec. A} = \frac{r^2}{\text{Cosin. A}}$, und deßhalb, weil $r = 1$ ist, und der gegebene Winkel oder Bogen durch a ausgedrückt wird,

$$\text{Sec. 2a} = \frac{1}{\text{Cosin. 2a}}, \text{ und Sec. 2a} \times \text{Cosin. 2a} = 1,$$

$$\text{mithin Cosin. 2a} = \frac{1}{\text{Sec. 2a}};$$

2) Subtrahirt man die beiden Ausdrücke dieser Gleichung von 1, und addirt man dieselben zu 1, so erhält man die Gleichungen

$$1 - \text{Cosin. 2a} = 1 - \frac{1}{\text{Sec. 2a}} = \frac{\text{Sec 2a} - 1}{\text{Sec. 2a}},$$

(Arithm. III. §. 67. Lehrs. II. Zus.), und

$$1 + \text{Cosin. 2a} = 1 + \frac{1}{\text{Sec. 2a}} = \frac{1 + \text{Sec. 2a}}{\text{Sec. 2a}},$$

$$\text{folglich } \frac{1 - \text{Cosin. 2a}}{1 + \text{Cosin. 2a}} = \frac{\text{Sec. 2a} - 1}{\text{Sec. 2a} + 1},$$

$$\text{und Tang. a}^2 = \frac{\text{Sec. 2a} - 1}{\text{Sec. 2a} + 1}, \text{ weil}$$

$$\text{Tang. a} = \sqrt{\left(\frac{1 - \text{Cosin. 2a}}{1 + \text{Cosin. 2a}}\right)} \text{ (§. 85. Zus. IV.);}$$

3) Bei dem Bruche $\frac{\text{Sec. 2a} - 1}{\text{Sec. 2a} + 1}$ multiplizirt man Zähler und Nenner mit Sec. 2a + 1, es ist dann

$$Tang.\ a^2 = \frac{(Sec.\ 2a - 1)\ (Sec.\ 2a + 1)}{(Sec.\ 2a + 1)^2}$$

$$= \frac{Sec.\ 2a^2 - 1}{(Sec.\ 2a + 1)^2}$$ (Arithm. III. §. 87. VI.)

$$= \frac{Tang.\ 2a^2}{(Sec.\ 2a + 1)^2},$$ indem $Sec.\, a^2 = r^2 + Tang.\, a^2$, und $Sec.\ a^2 - r^2 = Tang.\ a^2$, und deßhalb, da $r = 1$, auch $(Sec.\ 2a)^2 - 1 = (Tang.\ 2a)^2$, oder $Sec.\ 2a^2 - 1 = Tang.\ 2a^2$ (§. 75).

4) Zieht man auf beiden Seiten bei der Gleichung, welche den Werth für $Tang.\ a^2$ angibt, die Quadratwurzel aus, so ist

$$Tang.\ a = \frac{Tang.\ 2a}{Sec.\ 2a + 1}.$$

Beweis für die zweite Formel.

1) Man multiplizirt, um den Beweis für Nro. II. zu führen, den beim vorigen Beweise vorkommenden Zähler und Nenner des Bruches $\frac{Sec.\ 2a - 1}{Sec.\ 2a + 1}$ mit $Sec.\ 2a - 1$, ist dann

$$Tang.\ a^2 = \frac{(Sec.\ 2a - 1)^2}{(Sec.\ 2a + 1)\ (Sec.\ 2a - 1)}$$

$$= \frac{(Sec.\ 2a - 1)^2}{Sec.\ 2a^2 - 1} = \frac{(Sec.\ 2a - 1)^2}{Tang.\ 2a^2};$$

2) Daher ist auch

$$Tang.\ a = \frac{Sec.\ 2a - 1}{Tang.\ 2a}.$$

I. Zusatz: Setzt man $g = 2a$, so ist $\frac{1}{2}g = a$, und nach dem Lehrsatze

$$Tang.\ \tfrac{1}{2}g = \frac{Tang.\ g}{Sec.\ g + 1},$$ wie auch

$$Tang.\ \tfrac{1}{2}g = \frac{Sec.\ g - 1}{Tang.\ g}.$$

II. Zusatz: Die Tangens des einfachen Winkels ist auch der Differenz aus der Kosekans und der Kotangens des doppelten Winkels gleich, das ist,

$$Tang.\ a = Cosec.\ 2a - Cotang.\ 2a$$

Denn nach der II. Formel des Lehrsatzes ist, wenn man die Differenz in ihren Minuend und Subtrahend auflös't,

$$Tang.\ a = \frac{Sec.\ 2a - 1}{Tang.\ 2a} = \frac{Sec.\ 2a}{Tang.\ 2a} - \frac{1}{Tang.\ 2a};$$

nun ist $Sec.\ 2a = \frac{1}{Cosin.\ 2a}$ (§. 77.),

dann $Tang.\ 2a = \frac{Sin.\ 2a}{Cosin.\ 2a}$ (§. 76.),

und $\frac{1}{Tang.\ 2a} = Cotang.\ 2a$, weßhalb

$$Tang.\ a = \frac{1}{Cosin.\ 2a} \times \frac{Cosin.\ 2a}{Sin.\ 2a} - Cot.\ 2a$$

$$= \frac{1}{Sin.\ 2a} - Cot.\ 2a = Cosec.\ 2a - Cot.\ 2a,$$

indem bei der Division mit dem umgekehrten Divisor multiplizirt (Arithm. III. §. 67. Lehrs. V. Zus. 1.), und $Cosec.\ 2a$ anstatt $\frac{1}{Sin.\ 2a}$ gesetzt wird (§. 80.).

III. Zusatz: Die Kotangens des einfachen Winkels erhält man, wenn man die Kosekans und Kotangens des nämlichen doppelten Winkels addirt, das ist, $Cot.\ a = Cosec.\ 2a + Cot.\ 2a$. Denn nach dem II. Zusatze des §. 79., und nach der ersten Formel des Lehrsatzes ist

$$Cot.\ a = \frac{1}{Tang.\ a} = \frac{Sec.\ 2a + 1}{Tang.\ 2a}$$

$$= \frac{Sec.\ 2a}{Tang.\ 2a} + \frac{1}{Tang.\ 2a}$$

$$= Cosec.\ 2a + Cot.\ 2a \text{ (Zus. I.)}.$$

IV. Zusatz: Setzt man $g = 2a$, also $\frac{1}{2}g = a$, so ist nach dem II. und III. Zusatze

$Tang.\ \frac{1}{2}g = Cosec.\ g - Cot.\ g$, und
$Cot.\ \frac{1}{2}g = Cosec.\ g + Cot.\ g.$

V. Zusatz: $Tang.\ a + Cot. = \frac{2}{Sin.\ 2a}$. Denn nach dem II. und III. Zusatze ist

$Tang.\ a = Cosec.\ 2a - Cot.\ 2a$,
und $Cot.\ a = Cosec.\ 2a + Cot.\ 2a$,
also $Tang.\ a + Cot.\ a = 2\ Cosec.\ 2a$

$= 2 \times Cosec.\ 2a = 2 \times \frac{1}{Sin.\ 2a}$

$= \frac{2}{Sin.\ 2a}$ (§. 80.).

§. 90.

VIII. Lehrsatz:

Die Sekans eines Winkels oder Bogens, weniger 1, ist gleich dem zweifachen Quadrate vom Sinus des halben Winkels, dividirt durch den Kosinus des nämlichen gegebenen Winkels; das ist, wenn g den Winkel bezeichnet

$$Sec.\ g - 1 = \frac{2\ Sin.\ \frac{1}{2}g^2}{Cosin.\ g}.$$

Beweis:

1) Nach dem V. Zusatze des §. 85. ist
$Cosin.\ g = 1 - 2\ Sin.\ \frac{1}{2}g^2$, mithin
$1 - Cosin.\ g = 2\ Sin.\ \frac{1}{2}g^2$, und
$\frac{1 - Cosin.\ g}{Cosin.\ g} = \frac{2\ Sin.\ \frac{1}{2}g^2}{Cosin.\ g}$;

2) Nun ist $Sec.\ g = \frac{1}{Cosin.\ g}$ (§. 77.),

und $Sec.\ g - 1 = \frac{1}{Cosin.\ g} - 1 = \frac{1 - Cosin.\ g}{Cosin.\ g}$,

folglich ist $Sec.\ g - 1 = \frac{2\ Sin.\ \frac{1}{2}g^2}{Cosin.\ g}$.

Anmerkung: 1) Nach den aufgestellten Lehrsätzen könnten noch viele solche Formeln in Absicht auf die trigonometrischen Linien zusammengesetzter Winkel oder Bögen entwickelt werden; es sind aber die bisher angeführten zureichend, um in dem folgenden Abschnitte zeigen zu können, wie die trigonometrischen Linien nach den Grundsätzen der Elementar-Mathematik berechnet werden können.

2) Der k. k. Herr Oberstlieutenant, Georg Freiherr von Vega, stellt im zweiten Bande seiner Vorlesungen über die Mathematik (Wien, bei Johann Thomas Edlen von Trattnern, 1803.) in dem Anhange über 100 der merkwürdigsten Formeln aus der analytischen Trigonometrie für den Halbmesser = 1 zur bequemeren Benützung zusammen.

III. Abschnitt.

Von den trigonometrischen Tabellen.

---

§. 91.

I. Aufgabe, für den Halbmesser = 1 den Sinus eines Winkels oder Bogens von 18 Grad zu berechnen.

Auflösung:

1) Man denke sich (Fig. 31.) in den um A beschriebenen Kreis ein reguläres Zeheneck gezeichnet (I. §. 127. Anmerk. 2.), und BC sei eine Seite desselben;

2) Zieht man die Halbmesser AB und AC, und von A auf BC das Perpendikel AE, so ist der Zentriwinkel BAC $= \frac{360^\circ}{10} = 36$ Grad (§. 127. Zus. III.), und der Winkel m als die Hälfte von ABC (I. §. 36. Zus. II.) ist = 18 Grad, weßhalb $n = \frac{1}{2}(180^\circ - 36^\circ) = 72$ Grad (*I.* §. 43. Zus. *III.*), oder auch $n = 90^\circ - 18^\circ = 72$ Grad (*I.* §. 43. Zus. V.), und $n = 2 \cdot BAC$, gleichwie $72^\circ = 36^\circ \times 2$;

3) Man verlängere BC am Punkte C, und mache die Verlängerung CD = CA, und ziehe die Linie AD; es ist der Winkel n = 2p (*I*. §. 43. Zus. VII.), also 2p = 2BAC, und p = BAC, wie auch der Winkel CBA ist = DBA, und das Dreieck CBA ist ähnlich dem Dreiecke DBA (*I*. §. 92. Zus.), mithin verhält sich

AB : BC = BD : AB;

4) Setzet man den Radius AB = 1, und drückt man die Sehne BC durch x aus, so ist BD = DC + CB = 1 + x, und es verhält sich auch
$1 : x = 1 + x : 1$, folglich (Arithm. IV. 35. Zus. IV.),
$1 = x + x^2$, oder $x^2 + x = 1$;

5) Sucht man in dieser Gleichung x, so findet man (Arithm. IV. §. 21.), daß

$$x = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{2{,}2360680-1}{2}$$

$= 0{,}6180340$, und $\tfrac{1}{2}x = 0{,}3090170$ .....

6) Nun ist aber CE der Sinus von ½BAC, oder von EAC, also, da CE = ½BC (*I*. §. 36. Zus. *II*.),

$$\tfrac{1}{2}x = \text{Sin. } \tfrac{1}{2}BAC = \text{Sin.} \frac{36^\circ}{2} = \text{Sin. } 18^\circ, \text{ und}$$

Sin. 18° = 0,3090170, indem $\sqrt{5} = 2{,}2360679$.... (*III*. §. 30.), mithin beinahe = 2,2360680.

I. Zusatz: Nach §. 70. ist $\text{Cosin. } A = \sqrt{(r^2 - \text{Sin. } A^2)}$, folglich ist $\text{Cosin. } 18^\circ = \sqrt{(1 - (\text{Sin. } 18^\circ)^2)} = 0{,}9510565$.....

II. Zusatz: Setzt man im VI. Zusatze des §. 85. anstatt g einen Winkel von 30 Grad, so ist ½g = 15, und deßhalb

$$\text{Sin. } 15^\circ = \sqrt{\left(\frac{1 - \text{Cosin. } 30^\circ}{2}\right)}, \text{ und}$$

$$\text{Cosin. } 15^\circ = \sqrt{\left(\frac{1 + \text{Cosin. } 30^\circ}{2}\right)}.$$

Nun ist Cosin. 30° = Sin. 60° = 0,8660254.... (§. 70. Zus. *III*.), mithin ist

$$\text{Sin. } 15^\circ = \sqrt{\left(\frac{1 - 0{,}8660254}{2}\right)},$$

$$\text{Cosin. } 15^\circ = \sqrt{\left(\frac{1 + 0{,}8660254}{2}\right)}$$, das ist,

$\text{Sin. } 15^\circ = \sqrt{0{,}0669873} = 0{,}2588190\ldots$, und
$\text{Cosin. } 15^\circ = \sqrt{0{,}9330127} = 0{,}9659258\ldots$

§. 92.

II. Aufgabe, für den Halbmesser 1 den Sinus eines Winkels oder Bogens von einer Minute zu finden.

Auflösung:

1) Da $18^\circ - 15^\circ = 3^\circ$, so ist $\text{Sin. } 3^\circ = \text{Sin. } (18^\circ - 15^\circ)$; deßhalb berechne man zuerst den Sinus eines Winkels oder Bogens von 3 Grad, es ist nach dem im §. 84. aufgestellten Lehrsatze
$\text{Sin. } 3^\circ = \text{Sin. } 18^\circ \,.\, \text{Cosin. } 15^\circ - \text{Cosin. } 18^\circ \,.\, \text{Sin. } 15$;

2) Setzt man nun aus dem vorigen §. die Werthe von dem Sinus und dem Kosinus der Winkel von 18° und 15°, so findet man, daß $\text{Sin. } 3^\circ = 0{,}0523360$;

3) Aus dem bekannten Sinus von 3 Grad berechne man den Kosinus von 3 Grad; es ist nach §. 70. $\text{Cosin. } 3^\circ = \sqrt{(1 - (\text{Sin. } 3^\circ)^2)}$, folglich $\text{Cosin. } 3^\circ = \sqrt{(1 - 0{,}0523360^2)} = 0{,}9986295$;

4) Aus dem Sinus und Kosinus von 3 Grad kann man nach §. 85. Zus. VI. den Sinus und den Kosinus von $^3/_2$ Grad, und aus diesen auf's Neue nach dem nämlichen Zusatze den Sinus und Kosinus von $^3/_4$ Grad oder 45 Minuten (*I.* §. 11.) berechnen, und nach der nämlichen Berechnung dann den Sinus und Kosinus von $\frac{45'}{2}$, $\frac{45'}{4}$, $\frac{45'}{8}$, $\frac{45'}{16}$, $\frac{45'}{32}$, und $^{45}/_{64}$ Minuten bestimmen;

5) Nun findet man nach dieser Berechnung, daß

$\text{Sin. } \frac{45'}{32} = 0{,}000409061532$, und

$\text{Sin. } \frac{45'}{64} = 0{,}00020453077$, und

die Sinus dieser beiden kleinen Winkel oder Bögen verhalten sich wie die Bögen oder Winkel selbst, das ist,

$$0{,}000409061532 : 0{,}00020453077$$
$$= \frac{45'}{32} : \frac{45'}{64} = 2 : 1 \text{ (Arithm. IV. §. 41.);}$$

6) Man sucht jetzt den Sinus von 1 Minute nach der Proportion:

$$\frac{45'}{64} : 1' = 0{,}00020453077 : \text{Sin. } 1',$$

folglich $\text{Sin. } 1' = 0{,}00020453077 : \frac{45'}{64}$

$$= 0{,}00029088820\ldots\ldots = 0{,}0002909,$$

wenn man nämlich durch Annäherung nur bis auf sieben Dezimalstellen gehen will, und deßhalb das siebente Dezimalziffer wegen der folgenden größeren Ziffer um eine Einheit größer annimmt.

I. Zusatz: Aus dem Sinus eines Winkels oder Bogens von einer Minute kann man nach §. 70. dessen Kosinus bestimmen; es ist

$$\text{Cosin. } 1' = \sqrt{(1 - (\text{Sin. } 1')^2)}$$
$$= \sqrt{(1 - 0{,}0002909^2)},$$ das ist,

der Kosinus von einer Minute ist beinahe gleich 1, oder $\text{Cosin. } 1' = 1$.

II. Zusatz: Aus dem Sinus eines Winkels oder Bogens von einer Minute kann man alle Sinus von Minute zu Minute bis auf 90 Grad nach §. 83. berechnen. Ist der Sinus für einen Winkel oder Bogen bekannt, so läßt sich dafür allemal nach §. 70. der Kosinus bestimmen.

III. Zusatz: Aus dem Sinus und Kosinus eines jeden Winkels oder Bogens kann man die Tangenten und Kotangenten, und die Sekanten und Kosekanten, wie auch die Quersinus nach den im *I.* Abschnitte aufgestellten Lehrsätzen berechnen; indem

$$\text{Tang. A} = \frac{\text{r . Sin. A}}{\text{Cosin. A}} \text{ (§. 76.),}$$

$$\text{Cotang. A} = \frac{\text{r . Cosin. A}}{\text{Sin. A}} \text{ (§. 79.),}$$

$$\text{Sec. A} = \frac{r^2}{\text{Cosin. A}} \text{ (§. 77.)},$$

$$\text{Cosec. A} = \frac{r^2}{\text{Sin. A}} \text{ (§. 80.)},$$

und $\text{Sinv. A} = r - \text{Cosin. A}$ (§. 72.).

Anmerkung: 1) Will man die trigonometrischen Linien für Winkel oder Bögen, die nur einige Sekunden groß sind, berechnen, so verfährt man auf eine ähnliche Weise, wie es in den vorstehenden Aufgaben bei der Bestimmung des Sinus und Kosinus für 1 Minute geschehen ist, um aus der bekannten Größe dieser Linien für Winkel von 18 und 15 Minuten den Sinus und Kosinus für eine Sekunde, und daraus sowohl diese beiden, als auch die übrigen trigonometrischen Linien für alle Winkel nach den so eben zitirten Lehrsätzen zu bestimmen.

2) Unter allen berechneten trigonometrischen Linien sind nur drei, die sich genau durch Rechnung finden und deßhalb in Rationalzahlen ausdrücken lassen; alle übrigen werden durch Annäherung bis auf eine gewisse Anzahl von Dezimalen bestimmt, und in Irrationalzahlen dargestellt (Arithm. III. §. 72. Zus. IV.), um für die vorkommenden Aufgaben die gehörige Genauigkeit zu erhalten.

Die drei trigonometrischen Linien, die sich durch Rechnung nach einem bestimmten Halbmesser des Kreises genau angeben lassen, sind der Sinus totus, das ist der Sinus eines Winkels von 90° und 270 Grad, und dann der Sinus von 30 Grad, und die Tangens von 45 Grad; weil der Sinus totus der Radius des Kreises selbst ist (§. 66.), dann der Sinus von 30 Grad dem halben Radius (§. 62. Zus. II.), und die Tangens von 45 Grad dem ganzen Radius gleich ist (§. 75. Zus. II.), oder $\text{Sin. } 90^\circ = \text{Sin. } 270^\circ = r = 1$, dann $\text{Sin. } 30^\circ = \frac{1}{2} r = \frac{1}{2} = 0,5$, und $\text{Tang. } 45^\circ = r = 1$.

3) Nach der im I. Theile dieses Lehrbuches in der VII. Tabelle vorkommenden Fig. 98. hält der Winkel nCB, da ein reguläres Achteck in den Kreis beschrieben ist (I. §. 123. Zus.), 45 Grad, und sein Sinus BG ist der halben Sehne des doppelt großen Bogens BnA gleich (§. 62. Zus. I.), also die Hälfte von der Seite BA des in den Kreis beschriebenen regulären Viereckes BAED, und diese ist, weil das Dreieck BCA wegen des Zentriwinkels von 90 Grad rechtwinklicht ist, gleich $\sqrt{(BC^2 + CA^2)}$ (I. §. 97.), das ist, $BA = \sqrt{2r^2} = r\sqrt{2} = \sqrt{2}$, und $\frac{1}{2} BA = BG$, oder $\text{Sin. } 45^\circ =$

Cosin. $45^{\circ} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}7071067812 = 0{,}7071068$, wenn man nämlich den Sinus und Kosinus nur bis auf sieben Dezimalstellen bestimmen will.

Da auf diese Weise der Sinus und Kosinus eines Winkels von 45 Grad auch aus anderen Gründen bekannt ist, so dient es zugleich zur Probe, ob sich bei der angegebenen Berechnung der Sinus und Kosinus kein Fehler eingeschlichen hat.

4) Setzt man den Radius des Kreises = 1, so ist der Sinus totus als der größte Sinus (§. 66.), mithin der Sinus eines Winkels von 90 Grad, und von 270 Grad ebenfalls = 1, und die Sinus aller übrigen Winkel oder Bögen sind kleiner als 1, und deßhalb ächte Brüche (Arithm. II. §. 3. a.)

5) Die Sinus und Kosinus von 0 Grad bis 90 Grad lassen sich durch unendliche Reihen bequemer berechnen, wenn man den Sinus totus, oder den Radius gleich 1 setzt, und dann die übrigen Sinus und Kosinus, welche nach dieser Voraussetzung ächte Brüche sind, in Dezimalbrüchen so ausdrückt, daß etwa die zehente Dezimalstelle noch zuverläßig ist.

Herr Baron von Vega führt auf diese Weise in seinen mathematischen Vorlesungen (§. 90. Anmerk. 2.) in dem vierten Hauptstücke beim Vortrage der Trigonometrie unendliche Reihen an, und zeigt durch sie die Berechnung der Sinus und Kosinus gegebener Winkel oder Bögen.

6) Bei den wirklichen Berechnungen der trigonometrischen Linien gibt es mehrere Vortheile, welche diese sehr beschwerliche Arbeit um vieles abkürzen und erleichtern; dieselben ausführlich anzugeben, ist aber überflüssig, weil es bei der Auflösung der angeführten Aufgaben nicht der Zweck ist, daß man darnach aufs Neue für alle Winkel oder Bögen die trigonometrischen Linien berechnen, sondern nur, daß man einsehen soll, auf welche Weise nach den bisher aufgestellten Lehrsätzen diese Linien gefunden werden können, indem dieselben schon berechnet, und in eigenen Tabellen vorhanden sind.

§. 93.

Erklärung.

Tabellen, in welchen für jeden Winkel oder Bogen die Größe der trigonometrischen Linien nach einem bestimmten Halbmesser angegeben ist, heissen trigono-

metrische Tabellen oder trigonometrische Tafeln.

I. Zusatz: Die stumpfen und erhabenen Winkel, und die Winkel, die größer sind als 360 Grad, haben mit ihren spitzigen Supplementen die nämlichen trigonometrischen Linien (§. 82.), deßwegen wird in den Tabellen die Größe dieser Linien nur für den Winkel oder Bögen von 0 Grad bis 90 Grad angegeben.

II. Zusatz: In den vorhandenen trigonometrischen Tabellen wurde der Halbmesser des Kreises, für welchen die trigonometrischen Linien berechnet sind, gleich 10^{10} angenommen, weßhalb bei diesen $r = 10.000'000.000$ (Arithm. III. §. 69. Zus. V.), und Log. $r =$ Log. Sin. $90^\circ = 10$, das ist, nach den Tabellen ist 10 der Logarithmus des Radius, und deßhalb der Logarithmus des Sinus von 90 Grad, und von 270 Grad (Arithm. IV. §. 55. a.), da bei den gemeinen oder dekadischen Logarithmen die Zahl 10 die Grundzahl oder Basis ist (Arithm. IV. §. 61. a.); ferner ist nach diesem Radius

Sin. $30^\circ = \frac{1}{2} r = 5.000'000.000$, und

Tang. $45^\circ = r = 10.000'000.000$.

III. Zusatz: Weil nach diesem Radius, um die vorkommenden Aufgaben mit der gehörigen Genauigkeit auflösen zu können, die trigonometrischen Linien in sehr großen Zahlen ausgedrückt werden, so ist die Rechnung mit Logarithmen beinahe unentbehrlich (Arithm. IV. §. 63. Anmerk. 3.), weßhalb den Tabellen auch die Logarithmen dieser Linien beigefügt sind.

IV. Zusatz: Da man beinahe immer nur mit Logarithmen rechnet, so sind in mehreren Tabellen anstatt der trigonometrischen Linien nur die Logarithmen angegeben, die denjenigen Zahlen entsprechen, welche nach dem genannten Halbmesser die Größe dieser Linien ausdrücken; und wenn diese letzteren in einigen größeren Tabellen vorkommen, so wird gewöhnlich der Radius $= 1$ gesetzt, und von den Linien selbst werden die treffenden Zahlen nur bis auf sieben Dezimalstellen angegeben.

V. Zusatz: Will man die für den Halbmesser 1

berechneten trigonometrischen Linien für den Halbmesser $10^{10} = 10.000'000.000$ bestimmen, so darf man nur die Linien mit diesem Halbmesser multipliziren, und umgekehrt, werden die für den Halbmesser 10^{10} gefundenen Linien für den Halbmesser 1 bestimmt, wenn man sie mit 10.000'000.000 dividirt (§. 81.).

VI. Zusatz: Wenn man aus den angeführten Logarithmen die trigonometrischen Linien bestimmen will (Arithm. IV. §. 69 — 71.), so muß man zuerst die Charakteristik 10 um 3 vermindern, dann findet man die Linien für den Halbmesser $10^7 = 10'000.000$. Würde man aber die vorige Charakteristik beibehalten, so wäre die Bestimmung der letzteren drei Ziffern unrichtig.

Will man hingegen diese Linien auf den Halbmesser 1 bringen, so muß man am Ende 10 Dezimalstellen in der gefundenen Zahl abschneiden (§. 82. Zus. II.), weil 10 die Charakteristik vom Logarithmus des Radius ist (Arithm. IV. §. 61. c.), und auf diese Weise mit dem Radius 10^{10} dividirt wird (Arithm. III. §. 5. Zus. III.).

Anmerkung: 1) In den älteren trigonometrischen Tabellen des Adrian Vlacq (Arithm. IV. §. 63. Anmerk. 5.) ist für die Winkel von 0 Grad bis 90 Grad nach dem erwähnten Halbmesser die Größe des Sinus, der Tangens und der Sekans angegeben, und zugleich sind die Logarithmen für den Sinus und die Tangens beigefügt.

2) Dagegen findet man aber in den neueren trigonometrischen Tabellen von Vega, und zwar in seinem logarithmisch-trigonometrischen Handbuche, das im Jahre 1820 bei Weidmann in Leipzig in der fünften Auflage erschienen ist, die Angabe der Größe der trigonometrischen Linien nicht, wohl aber ihre Logarithmen, indeß aber nur für die Winkel von 0 Grad bis 90 Grad die Logarithmen vom Sinus und Kosinus, und von der Tangens und Kotangens bis auf sieben Dezimalstellen angegeben, da man die Logarithmen der Sekans und Kosekans selten braucht, und sie aus den Logarithmen des Kosinus und des Sinus leicht zu finden sind.

Weil ich mich schon im IV. Theile meiner Arithmetik bei der Lehre von den Logarithmen auf dieses Hand-

buch bezog (Arithm. IV. §. 63. Anmerk. 6.), und meine Herren Zuhörer dasselbe zum Gebrauche bei den logarithmischen Berechnungen in Handen haben, so werde ich mich beim gegenwärtigen Vortrage der Trigonometrie ebenfalls mehrentheils darauf berufen, und in den folgenden Aufgaben kurz den Gebrauch dieser trigonometrischen Tabellen zeigen, wie ich es in der Arithmetik rücksichtlich der Logarithmen der natürlichen Zahlen that. Nähere Kenntniß über die Einrichtung und die Benützung dieser Tabellen gibt das Handbuch selbst.

3) Für diejenigen, die sich mit der ausübenden Mathematik beschäftigen, und größere mathematische Berechnungen zu machen haben, hat Herr Baron von Vega zum Behufe der logarithmisch-trigonometrischen Berechnungen in der Weidmannischen Buchhandlung zu Leipzig noch folgende zwei größere Werke herausgegeben:

a) Logarithmisch-trigonometrischen Tafeln, nebst andern zum Gebrauche der Mathematik eingerichteten Tafeln und Formeln in zwei Bänden, gr. 8. 1797; und

b) Vollständige Sammlung größerer logarithmisch-trigonometrischer Tafeln, in Folio, 1794, (Thesaurus logarithmorum completus).

Jeder dieser beiden Tabellen ist, wie dem Handbuche, eine ausführliche Anleitung zu ihrem Gebrauche beigefügt, und in dem letzten größeren Werke sind zu den feineren Berechnungen die Logarithmen der trigonometrischen Linien bis auf zehen Dezimalstellen für alle Winkel oder Bögen von 0 Grad bis 90 Grad von zehen zu zehen Sekunden angegeben.

4) Die Angabe der Logarithmen für alle Winkel oder Bögen des ersten Quadranten von zehen zu zehen Sekunden, indeß aber nur bis auf sieben Dezimalstellen, enthalten Callets logarithmisch-trigonometrische Tabellen ebenfalls; sie sind unter dem Titel bekannt: »Tables portatives de Logarithmes par Callet, édition stéréotype, à Paris chez Firmin Didot, 1795.«

§. 94.

III. Aufgabe, den Logarithmus des Sinus eines Winkels oder Bogens aus den Tabellen anzugeben, dessen Größe in Graden und Minuten bekannt ist.

Auflösung:

1) Ist der gegebene Winkel kleiner als 45 Grad, so schlage man die trigonometrischen Tabellen von Vega auf, und suche in der obersten horizontalen Spalte die Anzahl der Grade des gegebenen Winkels, und links in der ersten vertikalen Spalte von oben nach unten die gegebenen Minuten, es steht neben diesen in der nämlichen Zeile rechts unter der oberen Aufschrift Log. Sinus der verlangte Logarithmus des Sinus; daher ist z. B.

Log. Sin. 21° 36′ = 9,5659948.

2) Ist der gegebene Winkel größer als 45° aber kleiner als 90 Grad, somit in der zweiten Hälfte des ersten Quadranten, so suche man jene Seite auf, wo in der untersten horizontalen Spalte die Grade des gegebenen Winkels vorkommen, und suche rechts herauf in der äußersten Spalte die gegebenen Minuten; man findet links in der nämlichen Zeile nach der unten stehenden Aufschrift Log. Sinus den verlangten Logarithmus des Sinus; daher ist z. B.

Log. Sin. 69° 48′ = 9,9724310.

3) Wenn ein Winkel stumpf oder erhaben, oder auch größer ist, als 360 Grad, so bestimmt man zu ihm nach den im ersten Abschnitte gegebenen Vorschriften dessen Supplement (§. 64. d. und §. 82.), da dieses mit dem gegebenen Winkel die trigonometrischen Linien gleich hat, und man nimmt auf die Zeichen dieser letzteren die gehörige Rücksicht; deßwegen ist z. B.

Log. Sin. 130° 24′ = Log. Sin. 49° 36′ = 9,8816918;
Log. Sin. 218° 36′ = — Log. Sin. 38° 36′ = — 9,7951008;
Log. Sin. 324° 40′ = — Log. Sin. 35° 20 = — 9,7621775;
Log. Sin. 409° 30′ = Log. Sin. 49° 30′ = 9,8810455; rc.

1. Zusatz: Ganz auf die nämliche Weise verfahre man, um den Logarithmus der Tangens eines in Graden und Minuten gegebenen Winkels oder Bogens zu erhalten; daher ist z. B. Log. Tang. 69° 48, = 10,4342367, dann Log. Tang. 130° 24′ = — Log. Tang. 49° 36′ = — 10,0700364. u. s. f.

II. Zusatz: Aus dem Logarithmus des Sinus läßt sich nach dem XIII. Zusatze des §. 85., und der beigefügten ersten Anmerkung der Logarithmus des Quersinus bestimmen; es ist nämlich, wenn der Halbmesser $= r$ gesetzt wird, $\text{Sinv. } g = \frac{2 \text{ Sin. } \frac{1}{2} g^2}{r}$, also $\text{Log. Sinv. } g = 2 \text{ Log. Sin. } \frac{1}{2} g + \text{Log. } 2 - \text{Log. } r$ (Arithm. IV. §. 56 — 58.).

Anmerkung: 1) Der bei den Logarithmen in den Tabellen stehende Punkt trennt, wie bei den Logarithmen der natürlichen Zahlen, die Charakteristik von der Mantisse (Arithm. IV. §. 61. c), und steht deßhalb anstatt des bei den Dezimalen üblichen Zeichens (,).

2) Zur Erleichterung des Aufschlagens der Tabellen von Vega dient die Notiz, daß die Winkel von 0 Grad bis 45 Grad oben rückwärts, und ihre Minuten links abwärts zunehmen, und dagegen die Winkel von 45° bis 90 Grad unten vorwärts, und ihre Minuten rechts aufwärts wachsen. Bei den Logarithmen der trigonometrischen Linien von Adrian Vlacq ist dieses der Fall nicht, weil da die Grade aller Winkel oder Bögen von 0 Grad bis 90 Grad oben in der ersten horizontalen Spalte, und ihre Minuten links in der ersten vertikalen Spalte vorkommen.

3) Ich habe aus dem vorhin angeführten Grunde die Auflösung der vorstehenden Aufgabe nach Vega gezeigt, und werde es eben so rücksichtlich des Aufsuchens der Logarithmen trigonometrischer Linien bei den folgenden Aufgaben thun.

Hat man andere Tabellen, als die von Vega, so verfahre man beim Aufsuchen solcher Logarithmen nach den Vorschriften, die aus der Einrichtung der Tabellen selbst, und den ihnen gewöhnlich beigefügten Anweisungen hervorgehen.

§. 95.

IV. Aufgabe, den Logarithmus vom Kosinus eines in Graden und Minuten gegebenen Winkels oder Bogens aus den Tabellen anzugeben.

Auflösung:

1) Wenn der gegebene Winkel in der ersten Hälfte des ersten Quadranten liegt, somit kleiner als 45 Grad

ist, so suche man nach Vega in der obersten horizontalen Spalte die Grade, und links in der ersten senkrechten Spalte die Minuten des Winkels, es steht in der Kolumne, welche oben die Aufschrift Log. Cosin. hat, rechts mit den gegebenen Minuten in der nämlichen Zeile der verlangte Logarithmus; deßwegen ist z. B.

Log. Cosin. 21° 36′ = 9,9683786.

2) Ist der gegebene Winkel oder Bogen in der zweiten Hälfte des ersten Quadranten, so suche man in der untersten horizontalen Spalte die Winkel, und rechts aufwärts in der letzten senkrechten Spalte die Minuten des Winkels, und nehme aus jener Kolumne, wo unten Log. Cosin. steht, den entsprechenden Logarithmus; deßwegen ist z. B.

Log. Cosin. 69° 48′ = 9,5381943.

3) Wenn ein Winkel stumpf oder erhaben, oder auch größer als 360 Grad ist, so bestimme man sein Supplement (§. 64. d.), und suche zu diesem, da es immer spitzig ist, mit Berücksichtigung des Zeichens den entsprechenden Logarithmus des Kosinus; man findet auf diese Weise, daß z. B.

Log. Cosin. 130° 24′ = — Log. Cosin. 49° 36′
= — 9,8116554;
Log. Cosin. 218° 36′ = — Log. Cosin. 38° 36′
= — 9,8929404;
Log. Cosin. 324° 40′ = Log. Cosin. 35° 20′
= 9,9115844;
Log. Cosin. 409° 30′ = Log. Cosin. 49° 30′
= 9,8125444; ꝛc.

Zusatz: Ganz auf die nämliche Weise findet man den Logarithmus der Kotangens eines in Graden und Minuten gegebenen Winkels oder Bogens.

Anmerkung: In den kleineren Vlacqischen Tabellen haben die Logarithmen der Kosinus und Kotangenten keine eigene Spalte; man schlägt deßhalb den gegebenen Winkel nach seinen Graden und Minuten auf, und nimmt auf der anderen Seite von dessen Komplemente den Logarithmus des Sinus und der Tangens, es ist dieser der Logarithmus der Kotangens, und jener der Logarithmus des Kosinus des anfangs gegebenen Winkels oder Bogens.

Da

Da bei diesen Tabellen links die Winkel von 0 Grad bis 45 Grad vorkommen, und rechts daneben allemal ihr Komplement steht, so schlage man die Winkel unter 45 Grad auf der linken Seite, und die übrigen Winkel, die größer sind, als 45 Grad, auf der rechten Seite auf, und nehme vom Komplemente den gesuchten Logarithmus, um diesen für den Kosinus und die Kotangens zu erhalten.

Auf diese Weise findet man, daß z. B. Log. Cosin. $69^\circ\ 48' = 9{,}5381943$, und Log. Cotang. $69^\circ\ 48' = 9{,}5657633$, da man in den Blacqischen Tabellen zur rechten Seite den Winkel $69^\circ\ 48'$ findet, zur linken Seite in der nämlichen horizontalen Linie das Komplement von $20^\circ\ 12'$ steht, und die Tabelle angibt, daß Log. Sin. $20^\circ\ 12 = 9{,}5381943$, und Log. Tang. $20^\circ\ 12' = 9{,}5657633$, weßhalb Log. Cosin. $69^\circ\ 48' = 9{,}5381943$, und Log. Cotang. $69^\circ\ 48' = 9{,}5657633$.

§. 96.

V. Aufgabe, den Logarithmus der Sekans und der Kosekans eines in Graden und Minuten gegebenen Winkels zu bestimmen.

Auflösung:

1) Da in den Tabellen die Logarithmen der Sekanten und Kosekanten nicht unmittelbar angegeben sind, so bestimmt man dieselben aus den Logarithmen der Kosinus und Sinus (§. 77 und §. 80.); es ist

$$\text{Sec. A} = \frac{r^2}{\text{Cosin. A}},\ \text{und Cosec. A} = \frac{r^2}{\text{Sin. A}}.$$

2) Gleiche Zahlen haben gleiche Logarithmen (Arithm. §. 55. Zus. *III.*), deßhalb ist

$$\text{Log. Sec. A} = 2\ \text{Log. r} - \text{Log. Cosin. A},$$
und $$\text{Log. Cosec. A} = 2\ \text{Log. r} - \text{Log. Sin. A}$$

(Arith. IV. §. 57. Zus. und §. 58.);

das heißt, man erhält den Logarithmus der Sekans eines gegebenen Winkels oder Bogens, wenn man vom zweifachen Logarithmus des Radius, also von der Zahl 20, den Logarithmus des Kosinus dieses Winkels subtrahirt, und den Logarithmus der Kosekans bekömmt man, wenn man von der Zahl 20 den Logarithmus des Sinus abzieht, indem der Logarithmus des Ra-

dius oder Sinus totus gleich 10 ist (§. 93. Zus. *II.*), folglich 2 Log. r = 2 × 10 = 20.

Daher ist z. B. Log. *Sec.* 21° 36′ = 20 — Log. Cosin. 21° 36′ = 20 — 9,9683786 = 10,0316214, und Log. Cosec. 21° 36′ = 20 — Log. *Sin.* 21° 36′ = 20 — 9,5659948 = 10,4340052.

§. 97.

VI. Aufgabe, die Logarithmen des Sinus, Kosinus 2c. für einen in Graden, Minuten und Sekunden angegebenen Winkel oder Bogen zu bestimmen, wenn die Tabellen dieselben nur für Winkel enthalten, derer Größe in Graden und Minuten ausgedrückt ist.

Auflösung:

1) Um für Winkel, die in Graden, Minuten und Sekunden gegeben sind, die entsprechenden Logarithmen ihrer trigonometrischen Linien zu finden, darf man bei Winkeln, die sehr wenig von einander unterschieden sind, ohne merklichen Fehler annehmen, daß ihre Unterschiede mit den Unterschieden der Logarithmen ihrer trigonometrischen Linien gerade proportionirt sind, wie dieses auf eine ähnliche Weise bei den Logarithmen der natürlichen Zahlen der Fall ist (Arithm. IV. §. 66.).

2) Drückt man von diesen Winkeln den kleineren mit a, den mittleren mit b, und den größeren mit c aus, so verhält sich nach dieser Annahme

c—a : b—a = Log. *Sin.* c — Log. *Sin.* a : Log. *Sin.* b — Log. *Sin.* a,
c—a : b—a = Log. Tang. c — Log. Tang. a : Log. Tang. b — Log. Tang. a,
c—a : b—a = Log. Cos. a — Log. Cos. c : Log. Cos. a — Log. Cos. b, und
c—a : b—a = Log. Cot. a — Log. Cot. c : Log. Cot. a — Log. Cot. b.

3) Diese Annahmen sind um so richtiger, und die hier darnach aufgestellten Proportionen kommen der Wahrheit um so näher, je mehr sich die Winkel der Größe von 45 Grad nähern; dagegen ist für Winkel oder Bögen der ersteren und letzteren Grade des Quadranten die Abweichung von der Wahrheit etwas be-

trächtlicher, und deßwegen findet man in den kleineren Vegaischen Tabellen die Logarithmen der trigonometrischen Linien bei den ersten und den letzten fünf Graden des Quadranten von zehen zu zehen Sekunden, und im Anfange noch genauer bis auf einzelne Sekunden, und die zehenten Theile derselben angegeben.

Anmerkung: 1) Daß in den größeren Tabellen von Vega, und in jenen von Callet, die Logarithmen der trigonometrischen Linien für alle Winkel des ersten Quadranten von zehn zu zehn Sekunden vorkommen, ist schon bemerkt worden (§. 93. Anmerk. 3 und 4.).

2) In den Tabellen von Adrian Vlacq kommen anfangs die Logarithmen der trigonometrischen Linien für Winkel oder Bögen von einzelnen Minuten vor.

§. 98.

Beispiele zur vorigen Aufgabe.

1)

Man soll den Logarithmus des Sinus des Winkels von 36° 48′ 24″ bestimmen.

I. Auflösung:

1) Man bezeichne den gegebenen Winkel mit b, den nächst kleineren der Tabelle mit a, und den nächst größeren mit c, so daß $a = 36° 48'$, dann $b = 36° 48' 24''$, und $c = 36° 49'$, es ist $c - a = 1' = 60''$, und $b - a = 24''$;

2) Man bestimme aus den Tabellen die Logarithmen der Sinus von c und a, und ziehe letzteren vom ersten ab; es ist

Log. Sin. c = Log. Sin. 36° 49′ = 9,7776128, und
Log. Sin. a = Log. Sin. 36° 48′ = 9,7774439, also

Log. Sin. c — Log. Sin. a = 0,0001689;

3) Nach dem vorigen §. sind die Differenzen der Logarithmen der Sinus mit den Unterschieden ihrer Winkel gerade proportionirt, daher verhalten sich

$$60'' : 24'' = 0{,}0001689 : x,$$

und $$x = \frac{0{,}0001689 \times 24}{60} = \frac{0{,}0001689 \times 2}{5}$$

$= 0{,}0000675$ (Arithm. IV. §. 36.), das heißt,

Log. Sin. b — Log. Sin. a = x = 0,0000675, und deßhalb ist Log. Sin. b = Log. Sin. a + 0,0000675.

Wenn man nun den gefundenen Proportionaltheil x = 0,0000675 zum Logarithmus des Sinus des kleineren Winkels der Tabelle von 36° 48′ addirt, so erhält man den verlangten Logarithmus des Winkels von 36° 48′ 24″; oder

	Log. Sin. a = Log. Sin. 36° 48′ = 9,7774439,
dann	0,0000675 = + 675
also	Log. Sin. b = Log. Sin. 36° 48′ 24″ = 9,7775114.

II. Auflösung:

Auf eine bequemere und einfachere Weise erhält man für den Winkel von 36° 48′ 24″ den Logarithmus des Sinus, wenn man nach der in Vega's Handbuche angegebenen Vorschrift die für eine Sekunde bei 36° 48′ in der Spalte mit der Aufschrift Diff. 1″ berechnete Differenz, oder vielmehr den Proportionaltheil 28,14 mit der Anzahl der gegebenen Sekunden, also mit 24 multiplizirt, und das erhaltene Produkt 675, das beinahe 675,36 gleich ist, rechts herein zum Logarithmus des Sinus des nächst kleineren Winkels von 36° 48′ addirt; man erhält auf diese Weise, wie vorhin, daß Log. Sin. 36° 48′ 24″ = 9,7775114.

2)

Man soll den Logarithmus des Kosinus des nämlichen Winkels von 36° 48′ 24″ bestimmen.

I. Auflösung:

1) Man bezeichne, wie vorhin, den gegebenen Winkel mit b, und den nächst kleineren und nächst größeren Winkel der Tabelle mit a und c, es ist wieder c — a = 1′ = 60″, und b — a = 24″;

2) Man bestimme aus den Tabellen den Logarithmus des Kosinus von a und c, und ziehe, weil Log. Cosin. a > Log. Cosin. c (§. 71.), diesen von jenem ab; es ist

	Log. Cosin. a = Log. Cosin. 36° 48′ = 9,9034868,
und	Log. Cosin. c = Log. Cosin. 36° 49′ = 9,9033923,
also	Log. Cosin. a — Log. Cosin. c = 0,0000945;

3) Nach dem vorigen §. sind die Differenzen dieser Winkel, die sehr wenig von einander unterschieden sind, mit den Differenzen der Logarithmen ihrer Kosinus gerade proportinirt; deßwegen verhalten sich

$60'' : 24'' = 0,0000945 : x$,

oder $5 : 2 = 0,0000945 : \text{Log. Cosin. a} - \text{Log. Cos. b}$,

also $x = \frac{0,0000945 \times 2}{5} = 0,0000378$, das heißt,

$\text{Log. Cosin. a} - \text{Log. Cosin. b} = 0,0000378$,

und $\text{Log. Cosin. a} - 0,0000378 = \text{Log. Cosin. b}$,

oder $\text{Log. Cosin. a} = \text{Log. Cosin. } 36^\circ 48' = 9,9034868$,

dann $\quad - \quad 0,0000378 \quad = \quad - \quad 378$

also $\text{Log. Cos. b.} = \text{Log. Cos. } 36^\circ 48' 24'' = 9,9034490$.

II. Auflösung:

Auf eine einfachere Weise erhält man für den Winkel 36° 48′ 24″ den Logarithmus des Kosinus, wenn man nach der in Vega's Handbuche angegebenen Vorschrift die für eine Sekunde bei 36° 48′ in der Spalte mit der Aufschrift diff. 1″ berechnete Differenz, oder vielmehr den Proportionaltheil 15,76 mit der Anzahl der gegebenen Sekunden, also mit 24 multiplizirt, und das erhaltene Produkt 378, welches beinahe 378,24 gleich ist, rechts vom Logarithmus des Kosinus des nächst kleineren Winkels abzieht; man erhält auf diese Weise, wie vorhin, daß

$\text{Log. Cosin. } 36^\circ 48' 24'' = 9,9034490$.

Zusatz: Ganz auf die nämliche Weise, wie man hier den Logarithmus des Sinus und des Kosinus bestimmte, findet man auch den Logarithmus der Tangens und der Kotangens eines in Graden, Minuten und Sekunden gegebenen Winkels oder Bogens.

Anmerkung: 1) Wie sich aus den Logarithmen des Sinus und des Kosinus die Logarithmen der Sekans, der Kosekans und des Quersinus solcher Winkel finden lassen, ist aus dem ersichtlich, was über die Bestimmung der Logarithmen dieser Linien früherhin gesagt wurde (§. 94. Zus. II. und §. 96.).

2) In Vega's Handbuche ersieht man in der Einleitung die Vorschrift, nach der man für sehr kleine

Winkel durch ihre Verwandlung in Sekunden die Logarithmen der trigonometrischen Linien bestimmen kann.

3) Bei dem Kosinus und der Kotangens muß man die gefundenen Proportionaltheile subtrahiren, weil jene im ersten Quadranten abnehmen, wenn der Winkel zunimmt (§. 71 und §. 79. Zus. I.), und zu kleineren Zahlen auch kleinere Logarithmen gehören (Arithm. IV. §. 61. Zus. II.); dagegen muß man aber dieselben bei dem Sinus und der Tangens addiren.

§. 99.

VII. Aufgabe, zu einem gegebenen Logarithmus eines Sinus den entsprechenden Winkel in Graden und Minuten anzugeben.

Auflösung:

1) Man suche in dem Handbuche von Vega den gegebenen Logarithmus in den Spalten auf, welche die Aufschrift Log. Sin. oder Log. Cosin. haben.

2) Findet man diesen in der Spalte, die oben die Aufschrift Log. Sin. hat, so gibt die obere horizontale Spalte die Grade, und die links in der ersten vertikalen Kolumne mit dem gegebenen Logarithmus in einer Zeile stehende Zahl die Minuten des gesuchten Winkels an.

3) Findet man aber den gegebenen Logarithmus in der Spalte, welche oben die Aufschrift Log. Cosin. hat, so gibt die untere horizontale Spalte die Grade, und die mit dem Logarithmus in der nämlichen Zeile stehende Zahl der letzten senkrechten Kolumne rechts die Minuten des verlangten Winkels.

4) Trifft kein Logarithmus beider Spalten mit dem gegebenen genau überein, so nimmt man jenen, der am nächsten kömmt, und bestimmt nach Nro. 2 und 3. die Grade und Minuten des entsprechenden Winkels. Auf diese Weise ist z. B.

$9{,}6193864 = \text{Log. Sin. } 24^\circ\ 36'$,

dann $9{,}9865872 = \text{Log. Sin. } 75^\circ\ 50'$,

und beinahe $9{,}7847651 = \text{Log. Sin. } 37^\circ\ 32'$.

I. Zusatz: Auf die nämliche Weise bestimmt

man zum Logarithmus der Tangens den entsprechenden Winkel in Graden und Minuten.

II. Zusatz: Aus dem bekannten Logarithmus der Kosekans kann man den Logarithmus des Sinus, und daraus nach den Tabellen die Größe des Winkels in Graden und Minuten angeben. Denn nach §. 96. ist

$$\text{Log. Cosec. } A = 2 \text{ Log. } r - \text{Log. Sin. } A,$$

also $\text{Log. Sin. } A = 2 \text{ Log. } r - \text{Log. Cosec. } A.$

Das heißt, wenn man vom doppelten Logarithmus des Radius, also von der Zahl 20 den gegebenen Logarithmus der Kosekans abzieht, so findet man den Logarithmus des Sinus, und daraus den gesuchten Winkel. Deßhalb ist z. B.

$$10{,}4340052 = \text{Log. Cosec. } 21^\circ 36',$$

weil $20 - 10{,}4340052 = 9{,}5659948 = \text{Log. Sin. } 21^\circ 36'.$

III. Zusatz: Aus dem bekannten Logarithmus des Quersinus läßt sich die Größe des Winkels ebenfalls angeben, weil man daraus den Logarithmus des Sinus bestimmen kann. Denn nach dem *II.* Zusatze des §. 94. ist

$$\text{Sinv. } g = \frac{2 \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}g^2}{r},$$

also $\text{Sin. } \tfrac{1}{2}g^2 = \dfrac{r \cdot \text{Sinv. } g}{2},$

und $2 \text{ Log. Sin. } \tfrac{1}{2}g = \text{Log. Sinv. } g + \text{Log. } r - \text{Log. } 2,$

oder $\text{Log. Sin. } \tfrac{1}{2}g = \tfrac{1}{2}(\text{Log. Sinv. } g + \text{Log. } r - \text{Log. } 2).$

Anmerkung: 1) In Vlacq's Tabellen kommen auf den Seiten links für die Winkel von 0 Grad bis 45 Grad, und auf den Seiten rechts von 45 Grad bis 90 Grad die Logarithmen der Sinus vor; man sucht deßhalb da, weil keine Spalte mit der Aufschrift Log. Cosin. da ist, immerhin den Logarithmus des Sinus in der Spalte mit der Aufschrift Log. Sin.

2) Wie man die Winkel bis auf Sekunden für den Logarithmus eines Sinus angibt, der in der Tabelle nicht genau vorkömmt, wird später durch eine besondere Aufgabe gezeigt werden.

3) Bei dieser Aufgabe, und bei den folgenden Aufgaben, bei welchen man aus den bekannten Logarithmen der trigonometrischen Linien die Winkel angibt, bleibt es für hohle Winkel noch unbestimmt, ob der anfangs angenommene spitzige Winkel A, den die Ta-

bellen unmittelbar angeben, oder sein stumpfer Nebenwinkel, welcher 180° — A gleich ist (I. §. 11. Zus. III.), der wahre gesuchte Winkel ist (§. 82. b.); es muß deßhalb allemal zum voraus aus anderen Gründen bekannt sein, ob der gesuchte Winkel spitzig oder stumpf ist.

§. 100.

VIII. Aufgabe, den Winkel in Graden und Minuten zu bestimmen, welcher dem gegebenen Logarithmus des Kosinus entspricht.

Auflösung:

1) Man suche in den Tabellen von Vega den gegebenen Logarithmus sowohl in der Spalte, welche die Aufschrift Log. Cosin. hat, als auch in jener, wo Log. Sin. steht.

2) Findet man ihn in der Spalte Log. Cosin., so gibt die obere horizontale Spalte die Grade, und die mit dem gegebenen Logarithmus in der ersten links stehenden senkrechten Kolumne stehende Zahl die Minuten des gesuchten Winkels an.

3) Stimmt aber ein Logarithmus der Spalte Log. Sin. mit dem gegebenen überein, so gibt die untere horizontale Spalte die Grade, und die rechts in der letzten vertikalen Kolumne übereinstimmende Zahl die Minuten des verlangten Winkels.

4) Kömmt der gegebene Logarithmus in keiner dieser Spalten genau vor, so wählt man jenen, der ihm am nächsten kömmt, und gibt dafür die Grade und Minuten des Winkels an.

Auf diese Weise ist z. B.

9,9815870 = Log. Cosin. 16° 34′,
dann 9,5942514 = Log. Cosin. 66° 52′,
und beinahe 9,9742133 = Log. Cosin. 19° 33′.

I. Zusatz: Auf die nämliche Weise findet man aus dem gegebenen Logarithmus der Kotangens den entsprechenden Winkel in Graden und Minuten; es ist z. B.

10,2373944 = Log. Cot. 30° 4′.

II. Zusatz: Aus dem bekannten Logarithmus der

Sekans läßt sich der Logarithmus des Kosinus, und daraus der entsprechende Winkel bestimmen. Denn nach §. 96. Nro. 2. ist

$$\text{Log. Sec. } A = 2 \text{ Log. } r - \text{Log. Cosin. } A,$$

also $\text{Log. Cosin. } A = 2 \text{ Log. } r - \text{Log. Sec. } A.$

Wenn man demnach vom zweifachen Logarithmus des Radius, also von 20, den bekannten Logarithmus der Sekans abzieht, so erhält man den Logarithmus des Kosinus, woraus sich der Winkel angeben läßt. Deßwegen ist z. B.

$$10{,}0316214 = \text{Log. Sec. } 21^\circ\, 36',$$

da $20 - 10{,}0316214 = 9{,}9683786 = \text{Log. Cos. } 21^\circ\, 36'.$

Anmerkung: Weil in den Vlacqischen Tabellen die Logarithmen der Kotangenten in keiner eigenen Spalte, wie in Vega, vorkommen, so sucht man diese Logarithmen bei der Spalte mit der Aufschrift Log. Tang., und nimmt dann auf der anderen Seite den entsprechenden Komplementswinkel, um den gesuchten Winkel zu erhalten.

§. 101.

IX. Aufgabe, für einen gegebenen Logarithmus des Sinus, der in den Tabellen nicht genau vorkömmt, den entsprechenden Winkel bis auf Sekunden zu bestimmen.

I. Auflösung:

1) Es sei zum Logarithmus des Sinus 9,6486451 der entsprechende Winkel bis auf Sekunden zu bestimmen;

2) Man schlage in der Tabelle bei der Aufschrift Log. Sin. und Log. Cosin. auf, man findet nach der oben stehenden Aufschrift Log. Sin. die Logarithmen 9,6485124 und 9,6487665 als diejenigen Logarithmen, zwischen welchen der gegebene liegt, und erkennt daraus, daß der gesuchte Winkel 26 Grad, 26 Minuten und einige Sekunden beträgt.

3) Nach den im §. 97. bei Nro. 2. aufgestellten Proportionen bestimme man die Differenzen dieser drei

Logarithmen, da man die entsprechenden Winkel mit a, b und c bezeichnet; es ist

$$\text{Log. Sin. } c = 9{,}6487665 = \text{Log. Sin. } 26^\circ\ 27',$$
$$\text{Log. Sin. } b = 9{,}6486451,$$
$$\text{Log. Sin. } a = 9{,}6485124 = \text{Log. Sin. } 26^\circ\ 26',$$

also $\text{Log. Sin. } c - \text{Log. Sin. } a = 0{,}0002541$,
und $\text{Log. Sin. } b - \text{Log. Sin. } a = 0{,}0001327$,
mithin, da $26^\circ\ 27' - 26^\circ\ 26' = 1' = 60''$,

$$60'' : b - a = 0{,}0002541 : 0{,}0001327,$$

oder $60'' : b - a = 2541 : 1327$ (Arithm. IV. §. 34. Zus. 1.),

und $x = \dfrac{1327 \times 60}{2541} = \dfrac{79620}{2541} = 31'' = b - a.$

Da nun $b - a$ beinahe gleich ist $31''$, so ist $b = a + 31'' = 26^\circ\ 26'\ 31''$, und der dem gegebenen Logarithmus entsprechende Winkel hält beinahe $26^\circ\ 26'\ 31''$, weil man hier die gefundenen Sekunden addiren muß (§. 66.).

II. Auflösung:

Bequemer findet man nach den Tabellen von Vega den entsprechenden Winkel zum Logarithmus des Sinus, wenn man den in der Tabelle vorkommenden nächst kleineren Logarithmus 9,6485124 vom gegebenen Logarithmus 9,6486451 abzieht, und den Rest 0,0001327, oder 1327 mit der bei dem Logarithmus der Tabelle für eine Sekunde vorkommenden Differenz 42,34 dividirt, man erhält zum Quotienten beinahe 31, weßhalb der gesuchte Winkel $26^\circ\ 26'\ 31''$ beträgt.

I. Zusatz: Auf die nämliche Weise findet man auch zum Logarithmus der Tangens den entsprechenden Winkel in Graden, Minuten und Sekunden; daher ist z. B.

$$10{,}1948376 = \text{Log. Tang. } 57^\circ\ 26'\ 30''.$$

II. Zusatz: Zu einem gegebenen Logarithmus der Kosekans bestimmt man zuerst nach dem II. Zusatze des §. 99. den Logarithmus des Sinus, und dann aus diesem den entsprechenden Winkel in Graden, Minuten und Sekunden.

III. Zusatz: Auf eine ähnliche Weise verfährt

man, wenn man nach dem III. Zusatze des §. 99. aus dem Logarithmus des Quersinus den entsprechenden Winkel in Graden, Minuten und Sekunden angeben will.

§. 102.

X. Aufgabe, für einen gegebenen Logarithmus des Kosinus, der in den Tabellen nicht genau vorkömmt, den entsprechenden Winkel bis auf Sekunden zu bestimmen.

I. Auflösung:

1) Es sei zum Logarithmus des Kosinus 9,8807832 der entsprechende Winkel bis auf Sekunden zu bestimmen.

2) Man schlage in der Tabelle bei der Aufschrift Log. Sin. und Log. Cosin. auf, man findet nach der oben stehenden Aufschrift Log. Cosin. die Logarithmen 9,8808296 und 9,8807215 als diejenigen, zwischen welchen der gegebene Logarithmus des Kosinus liegt, woraus man ersieht, daß der entsprechende Winkel zwischen 40° 32′ und 40° 33′ liegt;

3) Nach §. 97. Nro. 2. bestimme man die Differenzen dieser drei Logarithmen, und bezeichne die entsprechenden Winkel mit a, b und c, es ist

Log. Cosin. a = 9,8808296 = Log. Cosin. 40° 32′,
Log. Cosin. b = 9,8807832.
Log. Cosin. c = 9,8807215 = Log. Cosin. 40° 33′.

also Log. Cosin. a — Log. Cosin. c = 0,0001081,
und Log. Cosin. b — Log. Cosin. c = 0,0000617,
mithin, da 40° 33′ — 40° 32′ = 1′ = 60″,

$$0{,}0001081 : 0{,}0000617 = 60'' : c - b'',$$

oder 1081 : 617 = 60″ : x″,

$$\text{also } x = \frac{617 \times 60}{1081} = 34''.$$

Da nun c — b = x, so ist c — x = b, folglich 40° 33′ — 34″ = 40° 32′ 26″ = b; man muß nämlich die gefundenen 34″ von dem nächst größeren

Winkel abziehen, um den verlangten Winkel zu erhalten, da im ersten Quadranten mit der Zunahme des Winkels die Abnahme des Kosinus verbunden ist (§. 71.).

II. Auflösung:

Bequemer findet man nach dem Handbuche von Vega den Winkel, welcher dem Logarithmus des Kosinus entspricht, wenn man, wie bei der Bestimmung des Winkels aus dem Logarithmus des Sinus (§. 101. Auflös. II.), die zwischen dem gegebenen Logarithmus und dem kleineren Logarithmus der Tabelle vorkommende Differenz mit der Differenz für eine Sekunde dividirt, und den gefundenen Quotienten von der Größe des nach dem Logarithmus der Tabelle gefundenen Winkels abzieht.

I. Zusatz: Auf die nämliche Weise kann man aus dem Logarithmus der Kotangens den Winkel in Graden, Minuten und Sekunden angeben, da die Kotangens im ersten Quadranten ebenfalls abnimmt, wenn der Winkel wächst; daher ist z. B. beinahe

$$9{,}1756843 = \text{Log. Cot. } 81^\circ\ 28'\ 37''.$$

II. Zusatz: Aus dem Logarithmus der Sekans kann man die Größe des Winkels ebenfalls in Graden, Minuten und Sekunden angeben, da nach dem II. Zusatze des §. 100. $\text{Log. Cosin. A} = 2\ \text{Log. r} - \text{Log. Sec. A} = 20 - \text{Log. Sec. A}$, und man somit aus dem Logarithmus der Sekans den Logarithmus des Kosinus, und aus diesem den Winkel auf die verlangte Weise finden kann.

Anmerkung: 1) Bei den im §. 97. Nro. 2. angeführten vier Proportionen kann man bei dem Kosinus und der Kotangens die nämliche Ordnung der Glieder beibehalten, und die größere Zahl von der kleineren abziehen, die Differenz wird negativ, und die am Ende gefundene Proportionalzahl muß man dann wieder subtrahiren (Arithm. III. §. 45. Lehrs. II.).

2) Um die Richtigkeit dieser Proportionen für Winkel, die nur um einige Sekunden von einander unterschieden sind, einzusehen, darf man sich nur für drei solche Winkel die Sinus konstruiren; man wird finden, daß sich die Differenzen der Sinus wie die Bögen ver-

halten, welche die Unterschiede dieser Winkel angeben, und die man, da sie sehr klein sind, wie gerade Linien betrachten kann, wodurch man kleinere geradlinigte Dreiecke erhält, die unter sich ähnlich sind, und dieses gilt auch für die übrigen trigonometrischen Linien, die sich wie die Sinus verhalten (§. 82.). Da ferner bei sehr großen Zahlen und bei kleinen Unterschieden derselben sich die Differenzen der Zahlen verhalten, wie die Differenzen ihrer Logarithmen (Arithm. IV. §. 66. Nro. 1.), so gelten die Proportionen auch von den Logarithmen der trigonometrischen Linien der Winkel, die hier um eine sehr kleine Größe, nämlich nicht über 60 Sekunden, von einander unterschieden sind.

II. Hauptstück.

Von der Auflösung der geradlinigten ebenen Dreiecke.

I. Abschnitt.

Von der Auflösung der rechtwinklichten und gleichschenklichten Dreiecke.

§. 103.

Erklärungen.

a) Unter der Auflösung der geradlinigten ebenen Dreiecke versteht man die Auflösung der Aufgaben, nach welchen aus drei gegebenen Stücken eines geradlinigten ebenen Dreieckes, worunter wenigstens eine Seite sein muß, die übrigen Stücke durch Rechnung gefunden werden.

b) Zur Bezeichnung der drei Winkel und der drei Seiten eines Dreieckes nimmt man der Kürze wegen für die Winkel die großen, und für ihre opponirten Seiten die kleinen Buchstaben des Alphabetes, so daß allemal ein Winkel, und die ihm gegenüber stehende Seite den nämlichen größern oder kleinern Buchstaben hat.

Deßhalb bezeichnet man (Fig. 33.) im rechtwinklichten Dreiecke BHA die den Winkeln H, B und A opponirten Seiten AB, AH und HB der Ordnung nach mit den Buchstaben h, b und a, während H, B und A die Winkel anzeigen.

Eben so bezeichnet man (Fig. 34.) im schiefwinklichten Dreiecke ABC, in welchem die Winkel durch A, B und C ausgedrückt sind, die opponirten Seiten BC, AB und AC der Ordnung nach mit den Buchstaben a, c und b.

c) Bei den trigonometrischen Lehrsätzen und den darnach auszuführenden Berechnungen beziehen sich die Ausdrücke „Halbmesser, Sinus, Kosinus ꝛc. und ihre Zeichen r, Sin., Cosin. ꝛc.", wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt ist, immerhin auf den Halbmesser der Tabellen, und auf die darin für diesen Halbmesser berechneten trigonometrischen Linien eines Winkels oder Bogens.

Anmerkung: 1) Weil bei den trigonometrischen Rechnungen die Größe der Seiten in Zahlen ausgedrückt wird, und deßhalb diese letzteren als gezählte Größen betrachtet werden (Arithm. I. §. 6. c.), so kann man dieselben zur bequemeren Bezeichnung allemal mit einem einzigen Buchstaben bezeichnen, der dann die Zahl anzeigt, welche die Größe der Linien angibt (I. §. 79.).

2) In dem angeführten logarithmisch-trigonometrischen Handbuche von Vega sind bei den für die Auflösung der rechtwinklichten Dreiecke am Ende beigefügten Formeln die Winkel mit den kleinen Buchstaben a, b und h, und die ihnen opponirten Seiten der Ordnung nach mit den großen Buchstaben A, B und H bezeichnet.

3) Nach dem, was im vorigen Abschnitte rücksichtlich der trigonometrischen Tabellen gesagt wurde, ist der Halbmesser des Kreises, nach welchem die trigonometrischen Linien derselben berechnet wurden, die 10te Potenz von 10, oder $10^{10} = 10.000'000.000$; weßhalb die Beziehung der in diesem §. bei c erwähnten Ausdrücke auf den Halbmesser 10^{10} geschieht, dessen Logarithmus gleich 10 ist, indem $\text{Log. } r = \text{Log. } 10^{10} = 10$ (Arithm. IV. §. 55. a.).

Wenn daher nach trigonometrischen Formeln mittels der Tabellen gewisse Rechnungen vorzunehmen sind, und dabei der Halbmesser r vorkömmt, so darf man

immerhin 10 als dessen Logarithmus, oder als den Logarithmus des Sinus des Winkels von 90 Grad setzen, welcher der größte Sinus, oder der Sinustotus ist.

§. 104.

I. Lehrsatz:

Im rechtwinklichten Dreiecke verhält sich die Hypotenuse zu einem Perpendikel, wie der Radius zum Sinus des diesem Perpendikel opponirten Winkels, oder zum Kosinus des demselben anliegenden Winkels; das ist,

h : a = r : Sin. A,

oder auch h : b = r : Cosin. A.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 32.) das rechtwinklichte Dreieck AHB gegeben, und dessen Hypotenuse AB = h, dann HB = a, ferner AH = b, und der der Seite a opponirte, oder der der Seite b anliegende Winkel = A;

2) Man beschreibe mit der Hypotenuse AB = h als Halbmesser um A in der nämlichen Ebene einen Kreis, in welcher das Dreieck liegt, so ist AB oder h = R, dann BH oder a = Sin. m (§. 57. a.), und AH oder b = Cosin. m (§. 60.), wenn man nämlich den in der Figur gegebenen Winkel mit m, und im anderen Kreise, den man sich mit dem in den Tabellen angenommenen Halbmesser r beschrieben vorstellt, den vorkommenden gleich großen Winkel mit A bezeichnet;

3) Nach dem im §. 81. aufgestellten Lehrsatze sind in verschiedenen Kreisen bei gleichen Zentriwinkeln die gleichnamigen trigonometrischen Linien mit den Radien dieser Kreise gerade proportionirt, daher verhält sich

R : Sin. m = r : Sin. A,

und R : Cosin. m = r : Cosin. A;

4) Setzt man nach Nro. 2. anstatt R die Hypotenuse h, und anstatt Sin. m, und Cosin. m die Perpendikel a und b, so folgt, daß

h : a = r : Sin. A,

und h ; b = r : Cosin. A.

I. Zusatz: Weil in diesen beiden Proportionen die Vorderglieder gemeinschaftlich sind, so verhält sich auch (Arithm. IV. §. 43.)

a : b = Sin. A : Cosin. A

das ist, im rechtwinklichten Dreiecke verhält sich ein Perpendikel zum anderen, wie der Sinus des dem ersten Perpendikel entgegenstehenden Winkels zum Kosinus dieses nämlichen Winkels.

II. Zusatz: Da im rechtwinklichten Dreiecke jeder spitzige Winkel zum anderen spitzigen Winkel das Komplement ist (§. 59. und I. §. 43. Zus. V.); so ist Sin. A = Cosin. B, und Cosin. A = Sin. B (§. 60.), daher verhält sich auch nach dem hier aufgestellten Lehrsatze

h : a = r : Cosin. B,

und h : b = r : Sin. B.

Anmerkung: 1) Da diese Proportionen zur Bestimmung der unbekannten Stücke des Dreieckes dienen, die man nach den in den Tabellen schon berechneten trigonometrischen Linien findet, so werden dieselben gleich auf diese Linien und den Halbmesser ihres Kreises bezogen, so daß r diesen letzteren, und A und B die Winkel bezeichnen, für welche die Tabellen nach dem Halbmesser r die trigonometrischen Funktionen angeben.

2) Um sich diese Proportionen deutlich vorzustellen, denke man sich, es sei (Fig. 28.) das Dreieck ace das gegebene rechtwinklichte Dreieck, von welchem durch Messung einige Stücke bekannt sind, und (Fig. 27.) das Dreieck ACE sei das Dreieck, das nach dem Halbmesser der Tabellen den Sinus und den Kosinus für den Winkel CAE enthält, welcher dem Winkel cae des anderen Dreieckes gleich ist.

Weil in diesen Dreiecken bei E und e rechte Winkel sind (§. 57. a.), so sind dieselben ähnlich (I. §. 92. Zus.), und es verhält sich

ac : ce = AC : CE,

dann ac : ae = AC : AE,

und ce : ae = CE : AE,

das heißt, im rechtwinklichten Dreiecke ace verhält sich die Hypotenuse zu einem Perpendikel, wie der in den Tabellen angenommene Halbmesser zu dem darin berechneten Sinus des dem Perpendikel gegenüber stehenden Winkels, u. s. f.

§. 105.

II. Lehrsatz:

Im rechtwinklichten Dreiecke verhält sich ein Perpendikel zum anderen, wie der Radius zur Tangens des dem letzten Perpendikel opponirten, oder zur Kotangens des demselben anliegenden Winkels; das ist,

b : a = r : Tang. A,
und b : a = r : Cotang. B.

Beweis:

1) Es sei (Fig. 33.) das Dreieck HBA gegeben, und dessen Hypotenuse AB = h, dann HB = a, und AH = b, und der opponirte oder anliegende Winkel = A;

2) Man beschreibe mit dem Perpendikel AH = b von A aus einen Kreis, so ist AH oder b = R, dann BH oder a = Tang. m (§. 58. a.), und a ist zugleich = Cotang. n (§. 60.), wenn man nämlich die im gegebenen Dreiecke vorkommenden spitzigen Winkel mit m und n, und die gleich großen Winkel des anderen Dreieckes, das nach dem Halbmesser r konstruirt ist, mit A und B bezeichnet;

3) Nach §. 81. verhält sich
R : Tang. m = r : Tang. A,
und R : Cotang. n = r : Cotang. B,
mithin b : a = r : Tang. A,
und b : a = r : Cotang. B.

Zusatz: Nimmt man das Perpendikel a als Radius an, und beschreibt man damit den Kreis um B, so wird das andere Perpendikel die Tangens des ihm gegenüber stehenden, und die Kotangens des ihm anliegenden Winkels; deßwegen verhält sich auch nach dem aufgestellten Lehrsatze

a : b = r : Tang. B,
und a : b = r : Cotang. A.

Anmerkung: Wenn man mit einem Perpendikel aus dem Scheitel eines spitzigen Winkels den Kreis beschreibt, so wird (Fig. 33.) die Hypotenuse BA oder h die Sekans des einen, und zugleich die Kosekans des anderen spitzigen Winkels. Man stellt aber für die Sekans und Kosekans keine besonderen Lehrsätze auf, weil diese Linien, oder vielmehr ihre Logarithmen, in den Tabellen nicht unmittelbar vorkommen, und sich die Aufgaben, wenn ein Perpendikel als Radius angenommen wird, mittels der Tangens und der Kotangens auflösen lassen.

§. 106.

I. Aufgabe, ein rechtwinklichtes Dreieck aufzulösen, wenn unter den gegebenen oder bekannten Stücken die Hypotenuse vorkömmt.

Auflösung:

a) Wenn nebst dem rechten Winkel H, und der Hypotenuse h noch ein Perpendikel, etwa a, gegeben ist, so ist das Dreieck bestimmt (I. §. 34. Zus. II.), und man kann das andere Perpendikel b nach dem bekannten Lehrsatze in Betreff des Quadrates der Hypotenuse finden (I. §. 98.); es ist (Fig. 32.) $b = \sqrt{(h^2 - a^2)} = \sqrt{((h + a)(h - a))}$ (Arithm. III. §. 87. Nro. VI.).

Aus der Hypotenuse h und dem Perpendikel a findet man nach §. 104. den Winkel A; es verhält sich

$$h : a = r : \text{Sin. } A,$$

mithin $\text{Sin. } A = \frac{a \cdot r}{h}$ (Arithm. IV. §. 36.).

Aus dem Winkel A findet man den Winkel B, indem $B = 90^0 - A$ (I. §. 43. Zus. V.).

Da auf diese Weise alle Seiten und alle Winkel bekannt sind, so kann man noch den Flächeninhalt des Dreieckes finden; es ist, wenn man a als Höhe und b als Basis annimmt (I. §. 156.) $\triangle HBA = \frac{b \cdot a}{2}$.

b) Wenn nebst dem rechten Winkel H, der im rechtwinklichten Dreiecke zum voraus bekannt ist, und der Hypotenuse h ein spitziger Winkel, etwa A, gege-

ben ist, so ist das Dreieck ebenfalls bestimmt (I. §. 44. Zus. II.), und man findet den Winkel B, wenn man A von 90 Grad abzieht (I. §. 43. Zus. V.).

Nach §. 104. berechne man die Perpendikel a und b; es verhält sich

$$h : a = r : \text{Sin. } A,$$

und $h : b = r : \text{Cosin. } A$,

also $a = \frac{h \,.\, \text{Sin. } A}{r}$ (Arithm. IV. §. 36.),

und $b = \frac{h \,.\, \text{Cosin. } A}{r}$.

Aus a und b kann man nun, wie vorhin, den Flächeninhalt des Dreieckes berechnen.

§. 107.

II. Aufgabe, ein rechtwinklichtes Dreieck aufzulösen, wenn unter den gegebenen oder bekannten Stücken ein Perpendikel ist.

Auflösung:

a) Wenn nebst dem rechten Winkel und einem Perpendikel noch eine Seite gegeben ist, entweder die Hypotenuse oder das andere Perpendikel, so berechnet man, da das Dreieck bestimmt ist (I. §. 20. Zus. und §. 34. Zus. II.), die noch unbekannte Seite nach der im I. Theile dieses Lehrbuches im §. 98. angegebenen Vorschrift; es ist (Fig. 33.), wenn die Perpendikel a und b bekannt sind,

$$h^2 = a^2 + b^2, \text{ also } h = \sqrt{(a^2 + b^2)}.$$

Aus den beiden Perpendikeln findet man nach §. 105. den spitzigen Winkel A; es verhält sich

$$b : a = r : \text{Tang. } A,$$

also $\text{Tang. } A = \frac{a \,.\, r}{b}$ (Arithm. IV. §. 36.).

Weiß man den Winkel A, so nimmt man sein Komplement, um B zu erhalten, da $A + B = 90^\circ$, also $B = 90^\circ - A$.

Aus a und b läßt sich wieder, wie vorhin (§. 106. a.), der Flächeninhalt des Dreieckes bestimmen.

b) Wenn nebst dem rechten Winkel H und einem Perpendikel a ein spitziger Winkel, etwa A, gegeben ist, so findet man den anderen spitzigen Winkel B, wenn man A von 90 Grad abzieht.

Aus dem Perpendikel a und dem Winkel A suche man das andere Perpendikel b nach §. 105; es verhält sich

$$b : a = r : \text{Tang. } A,$$

$$\text{also } b = \frac{a \,.\, r}{\text{Tang. } A} \text{ (Arithm. IV. §. 36.).}$$

Aus a und b könnte man, wie vorhin, die Hypotenuse h berechnen (I. §. 98.); man kann aber auch dieselbe aus dem Perpendikel a, und dem Winkel A nach §. 104. finden; es verhält sich

$$h : a = r : \text{Sin. } A,$$

$$\text{also } h = \frac{a \,.\, r}{\text{Sin. } A} \text{ (Arithm. IV. §. 36.).}$$

Aus a und b kann man endlich wieder auf die angezeigte Weise den Flächeninhalt des Dreieckes berechnen.

§. 108.

Beispiele zur Uebung.

I. Beispiel:

Es sei (Fig. 32.) im rechtwinklichten Dreiecke HBA die Hypotenuse AB oder h = 170 Schuh 2 Zoll, und das Perpendikel BH oder a = 105 Schuh 4 Zoll; wie groß sind unter diesen Bedingungen die übrigen Stücke, nämlich das andere Perpendikel AH oder b, dann die spitzigen Winkel A und B, und der Flächeninhalt dieses Dreieckes?

Auflösung:

1) Nach der Dezimaleintheilung, die bei den trigonometrischen Berechnungen üblich ist (I. §. 79. Anmerk. 2 und 3.), ist ein Zoll der 10te Theil eines Fußes; daher sind 170 Schuh 2 Z. = 170,2 Sch., und 105 Sch. 4 Z. = 105,4 Schuh;

2) Nach §. 106. a. ist

$$b = \sqrt{((h + a)(h - a))},$$

also $\text{Log. } b = \frac{\text{Log. } (h + a) + \text{Log. } (h - a)}{2}$

(Arithm. IV. §. 56 und §. 59.).

In diesem Beispiele ist aber

$h = 170,2$

und $a = 105,4$

also $h + a = 275,6$, und $h - a = 64,8$;

nun ist Log. 275,6 = 2,4402792

und Log. 64,8 = 1,8115750

folglich Log. (h + a) + Log. (h − a) = 4,2518542

: 2

2,1259271.

Es ist also Log. b = 2,1259271 = Log. 133,637, das ist, das gesuchte Perpendikel b hält 133 Schuh 6 Zoll 3 Linien 7 Skrupel, mithin beinahe 133 Sch. 6 Z. 4 L.

3) Aus der Hypotenuse h = 170,2 Sch. und dem Perpendikel a = 105,4 Sch. berechne man den Winkel A; nach §. 106. a ist

$\text{Sin. } A = \frac{a \cdot r}{h}$, also (Arithm. IV. §. 77.)

Log. Sin. A = Log. a + Log. r − Log. h;

es ist aber Log. a = Log. 105,4 = 2,0228406,

dann Log. r = 10,0000000,

und Compl. dec. Log. h = 7,7690404 − 10

mithin Log. Sin. A = $\text{Log. } \left(\frac{a \cdot r}{h}\right)$ = 19,7918810 − 10

= 9,7918810 = Log. Sin. 38° 16′.

Es hält demnach der Winkel A beinahe 38° 16′.

4) Aus dem Winkel A berechne man den Winkel B; es ist B = 90° − A = 90° − 38° 16′ = 51° 44′.

5) Endlich ist der Flächeninhalt dieses Dreieckes (§. 106. a.), oder

$\triangle HBA = \frac{b \cdot a}{2}$, also (Arithm. IV. §. 56 und 57.)

$Log. (\triangle HBA) = Log. b + Log. a - Log. 2.$

Nun ist $Log. b = Log. 133,637 = 2,1259271$
dann $Log. a = Log. 105,4 = 2,0228406$
und Compl. dec. $Log. 2 = 9,6989700 - 10$

also $Log. (\triangle HBA) = Log. \left(\frac{b \cdot a}{2}\right) = 13,8477377 - 10$

$= 3,8477377 = 7042,67.$

Das ist, der Flächeninhalt dieses Dreieckes beträgt beinahe 7042,67 □ Schuh = 70 □ Ruthen 42 □ Fuß und 67 □ Zoll, weil die Größe der Grundlinie und der Höhe in Schuhen ausgedrückt ist, und deßhalb die gefundene Zahl 7042,67 den Flächeninhalt in Quadratschuhen angibt (§. 36. Anmerk. 5. und I. §. 153.).

II. Beispiel:

Wenn bei einem rechtwinklichten Dreiecke die Hypotenuse h = 698 Schuh, und der spitzige Winkel A = 48° 36′ ist, wie groß sind die beiden Perpendikel, und wie groß ist sowohl der Winkel B, als auch der Flächeninhalt dieses Dreieckes?

Auflösung:

1) Weil der eine spitzige Winkel A bekannt ist, so weiß man auch den anderen Winkel B; es ist B = 90° — 48° 36′ = 41° 24′;

2) Nach §. 106. b. berechne man die Perpendikel a und b; es ist

$$a = \frac{h . Sin. A}{r}, \text{ und } b = \frac{h . Cosin. A}{r},$$

also $Log. a = Log. h + Log. Sin. A - Log. r,$
und $Log\ b = Log. h + Log. Cosin. A - Log. r$

Der Kürze wegen suche man a und b zugleich, es ist, da h = 698 Sch., und A = 48° 36′,

$Log. h = 2,8438554,$	dann $Log. h = 2,8438554,$
$Log. Sin. A = 9,8751256,$	$Log. Cosin. A = 9,8204063,$
also $Log. a = 12,7189810 - 10$	also $Log. b = 12,6642617 - 10$
$= 2,7189810 = Log. 523,57,$	$= 2,6642617 = Log\ 461,60.$

Es hält demnach das Perpendikel a beinahe 523,57 Sch., und das Perpendikel b beträgt 461,6 Schuh.

3) Aus den Perpendikeln a und b kann man jetzt, da ihre Logarithmen aus vorstehender Rechnung schon bekannt sind, auf die vorige Weise den Flächeninhalt finden; es ist

Log. a = 2,7189810,
Log. b = 2,6642617,
Compl. dec. Log. 2 = 9,6989700 — 10

also Log. $\triangle$ = 15,0822127 — 10 = 5,0822127
= 120840,5.

Es hält daher der Flächeninhalt dieses Dreieckes beinahe 120840,5 □ Schuh, das ist, 3 Tagwerk 8 □ Ruthen 40 □ Schuh und 50 □ Zoll (Arithm. I. §. 30.).

III. Beispiel:

Man soll in einem rechtwinklichten Dreiecke den Winkel B und das Perpendikel a nebst der Hypotenuse h und dem Flächeninhalte desselben berechnen, wenn das Perpendikel b = 224 Schuh, und der Winkel A = 24° 48'.

Auflösung:

1) Der gesuchte Winkel B ist = 90° — A = 90° — 24° 48' = 65° 12',

2) Aus dem Winkel A, welcher 24° 48' beträgt, und aus dem Perpendikel b, welches 224 Schuh hat, berechne man das andere Perpendikel a; nach §. 107. b. ist

$$a = \frac{b \cdot \text{Tang. } A}{r},$$

also Log. a = Log. b + Log. Tang. A — Log. r.

Nun ist, weil b = 224 Sch., und A = 24° 48',

Log. b = 2,3502480,
Log. Tang. A = 9,6647030,

mithin Log. a = 12,0149510 — 10 = 2,0149510
= Log. 103,503.

Es hält demnach das gesuchte Perpendikel beinahe 103 Schuh 5 Zoll, wenn man nämlich die tausendsten Theile des Fußes, oder die Skrupel nicht mehr berücksichtiget.

3) Aus dem so eben gefundenen Perpendikel a, und aus dem bekannten Winkel A berechne man die Hypotenuse h; nach §. 107. b. ist

$$h = \frac{a \cdot r}{\text{Sin. } A},$$

also $\text{Log. } h = \text{Log. } a + \text{Log. } r - \text{Log. Sin. } A$.

Nun ist, weil $a = 103,503$, und $A = 24^\circ\ 48'$,

$$\text{Log. } r = 10,$$
$$\text{Log. } a = 2,0149510,$$
$$\text{Compl. dec. Log. Sin. } A = 0,3773176 - 10$$

$$\text{also Log. } h = \text{Log. } \left(\frac{a \cdot r}{\text{Sin. } A}\right) = 12,3922686 - 10$$
$$= 2,3922686 = \text{Log. } 246,756.$$

Die Hypotenuse h beträgt daher 246,756 Fuß, mithin beinahe 246 Fuß 7 Zoll 6 Linien.

Nicht so bequem ist die Rechnung, wenn man die Hypotenuse h aus den Perpendikeln a und b bestimmt; da nach dem im I. Theile im §. 97. aufgestellten Lehrsatze $h^2 = a^2 + b^2$, folglich $h = \sqrt{(a^2 + b^2)}$, und deßhalb ohne die Logarithmen die Hypotenuse auch aus den Perpendikeln oder Katheten gefunden werden kann (I. §. 98.).

4) Aus den Perpendikeln a und b suche man endlich noch den Flächeninhalt des Dreieckes, welchen das halbe Produkt derselben angibt (I. §. 156.), und wofür der entsprechende Logarithmus (Arithm. IV. §. 56 und 57.) gleich ist

$\text{Log. } a + \text{Log. } b - \text{Log. } 2$, oder (Arithm. III. §. 52.)
$= \text{Log. } a + \text{Log. } b + \text{Compl. dec. Log. } 2$.

Nun ist, weil $a = 103,503$, und $b = 224$,

$$\text{Log. } a = 2,0149510,$$
$$\text{Log. } b = 3,3502480,$$
$$\text{Compl. dec. Log. } 2 = 9,6989700 - 10,$$

$$\text{also Log. } \triangle = 14,0641690 - 10$$
$$= 4,0641690 = \text{Log. } 11592,3.$$

Das ist, der Flächeninhalt des Dreieckes ist beinahe = 11592,3 □ Schuh = 115 □ Ruthen 92 □ Schuh und 30 □ Zoll.

Wenn daher in einem rechtwinklichten Dreiecke,
b = 224 Schuh,
und A = 24° 48′,
so ist B = 65° 12′,
a = 103,503 Sch. = 103 Sch. 5 Z.
h = 246,756 Sch. = 246 Sch. 7 Z. 6 L.,
und △ = 11592,3 □ Fuß.

IV. Beispiel:

Man soll in einem rechtwinklichten Dreiecke aus den beiden Perpendikeln a und b, von welchen a = 1456, 4 Schuh, und b = 2348,8 Schuh, die Hypotenuse h, und die beiden spitzigen Winkel A und B nebst dem Flächeninhalte berechnen.

Auflösung:

1) Aus den beiden Perpendikeln a und b könnte man ohne trigonometrische Berechnung die Hypotenuse h finden (I. §. 98.); man bestimmt sie aber trigonometrisch bequemer, wenn man vorhin die beiden spitzigen Winkel sucht;

2) Nach §. 107. a. ist

$$\text{Tang. A} = \frac{a \cdot r}{b},$$

also $Log.$ Tang. A = $Log.$ a + $Log.$ r — $Log.$ b
= $Log.$ a + $Log.$ r + Compl. dec. $Log.$ b
(Arithm. III. §. 52.).

Nun ist, weil a = 1456,4 und b = 2348,8,
$Log.$ r = 10,
$Log.$ a = 3,1632807,
Compl. dec. $Log.$ b = 6,6291540 — 10,

also $Log.$ Tang. A = 19,7924347 — 10
= 9,7924347 = $Log.$ Tang. 31° 48.

3) Aus dem Winkel A findet man den Winkel B; es ist B = 90° — A = 90° — 31° 48 = 58° 12;

4) Aus dem Perpendikel a und dem so eben gefundenen Winkel A berechnet man die Hypotenuse h; nach §. 107. b. ist

$$h = \frac{a \cdot r}{\text{Sin. } A},$$

also $Log.\ h = Log.\ a + Log.\ r - Log.\ Sin.\ A$
$= Log.\ a + Log.\ r + Compl.\ dec.\ Log.\ Sin.\ A.$

Nun ist, weil a = 1456,4 und A = 31° 48',

$Log.\ r = 10,$

$Log.\ a = 3,1632807,$

$Compl.\ dec.\ Log.\ Sin.\ A = 0,2782258 - 10,$

---

also $Log.\ h = Log. \left(\frac{a \cdot r}{\text{Sin. } A}\right) = 13,4415065 - 10$
$= 3,4415065 = Log.\ 2763,8.$

Die Hypotenuse h hat demnach beinahe 2763,8 Schuh = 2763 Schuh 8 Zoll.

5) Endlich findet man aus den Perpendikeln a und b den Flächeninhalt dieses Dreieckes; es ist (I. §. 156.)

$$\triangle = \frac{a \cdot b}{2}$$

also $Log.\ \triangle = Log.\ a + Log.\ b - Log.\ 2$
$= Log.\ a + Log.\ b + Compl.\ dec.\ Log.\ 2.$

Nun ist, weil a = 1456,4 und b = 2348,8,

$Log.\ a = 3,1632807,$

$Log.\ b = 3,3708460,$

$Compl.\ dec.\ Log.\ 2 = 9,6989700 - 10,$

---

also $Log.\ \triangle = Log. \left(\frac{a \cdot b}{2}\right) = 16,2330967 - 10$
$= 6,2330967 = Log.\ 1710396.$

Es beträgt demnach der Flächeninhalt dieses Dreieckes beinahe 1710396 □ Schuh = 42 Tagwerk oder Jauchert, dann 303 □ und 96 □ Fuß.

Auf diese Weise hat man gefunden, daß in einem rechtwinklichten Dreiecke die Hypotenuse h = 2763,8 Fuß, dann der Winkel A = 31° 48' und B = 58° 12', wie auch daß der Flächeninhalt desselben = 1710396 □ Fuß, wenn bekannt ist, daß das eine Per-

pendikel a = 1456,4 Fuß und das andere b = 2348,8 Fuß.

Anmerkung: 1) Bei diesen Beispielen sind die vorkommenden Linien und Flächen nach dem baierischen Längen- und Flächenmaaße angegeben (Arithm. I. §. 79 und 80.), wie dieses auch in der Folge bei solchen Aufgaben immerhin der Fall sein wird, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt ist. Sind die gegebenen Stücke in anderen Maaßen genannt, so findet man nach diesen die gesuchten Stücke, bei welchen dann die Eintheilungen der nämlichen Maaße berücksichtiget werden.

2) Weil man die trigonometrischen Berechnungen durch Logarithmen ausführt, so wird bei der Auflösung der Aufgaben anstatt r der bei den Tabellen vorkommende Halbmesser gesetzt, dessen Logarithmus = 10, indem da $r = 10^{10}$, also Log. r = 10 (Arithm. IV. §. 55. a.).

3) Ich habe in den vorstehenden Beispielen nach der vorangeschickten allgemeinen Auflösung die Aufgaben angeführt, die bei den rechtwinklichten Dreiecken möglich sind, um aus gegebenen Stücken die noch unbekannten Stücke zu berechnen. Ich werde die hier angeführten Formeln, und die, welche hinsichtlich der übrigen Dreiecke noch vorkommen, am Ende des nächsten Abschnittes zur bequemeren Benützung in einer tabellarischen Form zusammenstellen.

4) In Betreff der rechtwinklichten, und der übrigen Dreiecke bestimmen die im I. Theile dieses Lehrbuches in den §§. 20, 24, 34 und 44. Zus. II. aufgestellten Lehrsätze, ob ein Dreieck durch gewisse Stücke gegeben ist (I. §. 6.), und man somit dasselbe aus den Stücken berechnen kann, die zum voraus bekannt oder gegeben sind.

4) Wenn man beim vorstehenden letzten Beispiele aus dem Perpendikel a = 1456,4 Sch. und dem Perpendikel b = 2348,8 Sch. ohne Logarithmen die Hypotenuse h bestimmt (I. §. 98.), so sieht man, daß die Rechnung mit Logarithmen viel bequemer ist. Es ist $h = \sqrt{(a^2 + b^2)}$, mithin

$$a^2 = 1456{,}4^2 = 2119650{,}96,$$
$$b^2 = 2348{,}8^2 = 5514861{,}44,$$

also $a^2 + b^2 = 7634512{,}40$

und $\sqrt{(a^2 + b^2)} = \sqrt{7634512{,}40} = 2763{,}8 \ldots$

Das ist, die Hypotenuse h beträgt, wie nach der lo-

garithmisch-trigonometrischen Berechnung, wieder beinahe 2763,8 Fuß,

Eben so sieht man bei diesem nämlichen Beispiele, daß es mühsamer ist, wenn man ohne Logarithmen den Flächeninhalt des Dreieckes aus den bekannten Perpendikeln berechnet. Es ist nämlich der Flächeninhalt des Dreieckes (I. §. 156.), oder $\Delta = \frac{a \, . \, b}{2} = a \times \frac{1}{2} b$ $= \frac{1456,4 \times 2348,8}{2} = 1456,4 \times 1174,4 = 1710396,16$ $\square$ Fuß, mithin wieder beinahe $= 1710396 \square$ Schuh.

Wenn man die beiderseitigen Berechnungen mit einander vergleicht, so sieht man auch, daß man die Resultate mittels der Logarithmen so genau findet, wie nach den Regeln der gemeinen Arithmetik.

§. 109.

III. Lehrsatz:

Wenn man im gleichschenklichten Dreiecke jene Seite als Basis annimmt, welcher die gleichen Winkel anliegen, so verhält sich jede der zwei gleichen Seiten oder Schenkel zur halben Grundlinie, wie der Radius zum Sinus des halben Winkels an der Spitze; das ist, wenn man diesen mit B, die Seite oder den Schenkel mit c, und die Basis mit b bezeichnet,

$$c : \tfrac{1}{2} b = r : \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2} B.$$

Beweis:

1) Es sei (Fig. 34.) das Dreieck ABC das gleichschenklichte Dreieck, und AC oder b die Grundlinie, somit B die Spitze desselben, und die Seite oder den Schenkel AB, welcher dem Schenkel BC gleich ist, drücke man durch c aus;

2) Aus B ziehe man auf AC das Perpendikel BD (I. §. 33.), es theilt dieses die Grundlinie AC, und den Winkel B an der Spitze des Dreieckes in zwei gleiche Theile (I. §. 36. Zus. II.), so daß der Winkel

ABD oder $q = \frac{1}{2}$ ABC $= \frac{1}{2}$ B, und AD $= \frac{1}{2}$ AC $= \frac{1}{2}$ b.

3) Weil das Dreieck ABD wegen des rechten Winkels bei D rechtwinklicht ist (I. §. 9. Zus. IV.), so verhält sich (§. 104.)

$$BA : AD = r : \text{Sin. } q,$$

also $c : \frac{1}{2}b = r : \text{Sin. } \frac{1}{2}B.$

§. 110.

III. **Aufgabe**, in einem gleichschenklichten Dreiecke aus den gegebenen Stücken die unbekannten Stücke zu finden.

Auflösung:

Weil eine Seite bekannt sein muß (§. 61. Anmerk. 1.), so kann einer der beiden gleichen Schenkel, oder die Grundlinie gegeben sein, oder es kann nebst der Grundlinie zugleich noch eine Seite bekannt sein;

a) Ist nur eine Seite bekannt, entweder ein Schenkel oder die Grundlinie, so muß auch noch ein Winkel gegeben sein, aus dem sich allemal die beiden übrigen berechnen lassen (I. §. 43. Zus. III.), so daß das Dreieck bestimmt ist (I. §. 44. Zus. II.). Ist nämlich B bekannt, so ist (Fig. 34.), weil A = C (I. §. 21. Zus. I.), $A + C = 180° - B$ (I. §. 43. Zus. I.), mithin 2A oder $2C = 180° - B$, also $A = C = \frac{180° - B}{2} = 90° - \frac{1}{2}B$. Ist dagegen der Winkel A oder C gegeben, so ist $B = 180° - (A + C) = 180° - 2A = 180° - 2C$.

Wenn der Winkel B gegeben oder auf diese Weise gefunden ist, so kann man aus ihm und der gegebenen Seite die Grundlinie oder einen Schenkel berechnen, je nachdem dieser oder jene noch zu finden ist; indem (§. 109.)

$$c : \frac{1}{2}b = r : \text{Sin. } \frac{1}{2}B,$$

mithin $c = \frac{\frac{1}{2}b \cdot r}{\text{Sin. } \frac{1}{2}B}$ (Arithm. IV. §. 36.),

$$\text{und } {}^1\!/\!_2 b = \frac{c \;.\; \text{Sin. } {}^1\!/\!_2 B}{r},$$

$$\text{oder } b = \frac{2c \;.\; \text{Sin. } {}^1\!/\!_2 B}{r}.$$

Auf diese Weise werden nebst den Winkeln auch alle Seiten des gleichschenklichten Dreieckes bekannt.

b) Wenn die Grundlinie und ein Schenkel gegeben ist, so sind alle drei Seiten bekannt, und das Dreieck ist dadurch bestimmt (I. §. 24.). In diesem Falle berechnet man zuerst den Winkel B, aus dem sich dann auf die vorige Weise die beiden übrigen Winkel bestimmen lassen. Nach dem im §. 109. aufgestellten Lehrsatze verhält sich

$$c : {}^1\!/\!_2 b = r : \text{Sin. } {}^1\!/\!_2 B,$$

$$\text{daher ist Sin. } {}^1\!/\!_2 B = \frac{{}^1\!/\!_2 b \,.\, r}{c} = \frac{b \,.\, r}{2c}.$$

c) Wenn alle Seiten und Winkel theils gegeben, theils durch Rechnung bekannt sind, so bestimmt man den Flächeninhalt, wenn man vorhin die Höhe bestimmt (Fig. 34.), und dann aus der Höhe und der Grundlinie denselben berechnet (I. §. 156.).

Sind die beiden Stücke, der Winkel A und die Seite AB oder c bekannt, so ist, weil (§. 104.)

$$AB : BD = r : \text{Sin. } A,$$

$$\text{und } c : BD = r : \text{Sin. } A,$$

$$BD = \frac{c \;.\; \text{Sin. } A}{r} \text{ (Arithm. IV. §. 36.).}$$

Ist aber nebst dem Winkel A die Basis AC oder b bekannt, so ist, weil (§. 105.)

$$AD : BD = r : \text{Tang. } A,$$

$$\text{und } {}^1\!/\!_2 b : BD = r : \text{Tang. } A,$$

$$BD = \frac{{}^1\!/\!_2 b \;.\; \text{Tang. } A}{r}.$$

Sind die beiden Seiten AB und AC, oder c und b gegeben, so ist $BD = \sqrt{(AB^2 - AD^2)}$ (I. §. 98.), weßhalb $BD = \sqrt{(c^2 - {}^1\!/\!_4 b^2)} = \sqrt{((c + {}^1\!/\!_2 b)(c - {}^1\!/\!_2 b))}$ (Arithm. III. §. 87. VI.).

Setzt man in dem Ausdrucke $\frac{a \, . \, b}{2}$, der den Flächeninhalt des Dreieckes angibt (I. §. 156.), anstatt BD die gleichen Werthe, so findet man die Formeln, nach welchen man aus den bekannten Stücken gleich unmittelbar den Flächeninhalt des gleichschenklichten Dreieckes berechnen kann. Es ist nämlich $\triangle = \frac{AC \, . \, BD}{2} = \frac{1}{2} AC \times BD = \frac{1}{2} b \times BD$, somit

$$\triangle = \tfrac{1}{2} b \times \frac{c \, . \, \text{Sin. } A}{r} = \frac{b \, . \, c \, . \, \text{Sin. } A}{2r},$$

dann $\triangle = \frac{1}{2} b \times \frac{1}{2} b \, . \, \frac{\text{Tang. } A}{r}$

$$= \tfrac{1}{4} b^2 \, \frac{\text{Tang. } A}{r}$$

$$= (\tfrac{1}{2} b)^2 \times \frac{\text{Tang. } A}{r} = \frac{b^2 \, . \, \text{Tang. } A}{4r},$$

und $\triangle = \frac{1}{2} b \times \surd((c + \frac{1}{2} b)\,(c - \frac{1}{2} b))$.

Zusatz: Das gleichseitige Dreieck, bei welchem alle Paare von Seiten gleiche Linien oder gleiche Schenkel sind, läßt sich als ein gleichschenklichtes Dreieck betrachten. Weil aber bei demselben, wie überhaupt bei jedem Dreiecke, eine Seite bekannt sein muß, und jeder Winkel 60 Grad hält (I. §. 43. Zus. IV.), so ist nur mehr die Höhe des gleichseitigen Dreieckes, und daraus dessen Flächeninhalt durch Rechnung zu bestimmen.

Bezeichnet man (Fig. 34.) die Seite des gleichseitigen Dreieckes mit c, so daß AB = BC = AC = c, und ist das Perpendikel BD die Höhe desselben, so verhält sich (§. 104.)

$$AB : BD = r : \text{Sin. } A,$$

also $c : BD = r : \text{Sin. } 60^\circ$,

und $BD = \frac{c \, . \, \text{Sin. } 60^\circ}{r}$,

mithin $\triangle = \frac{1}{2} c \times \frac{c \, . \, \text{Sin. } 60^\circ}{r} = \frac{c^2 \, . \, \text{Sin. } 60^\circ}{2r}$.

Substituirt man hier anstatt Sin. 60° den gleichen Werth (§. 70. Zus. III.), nämlich $\frac{1}{2} r \sqrt{3}$, so findet man, daß

$$BD = \frac{c \, . \, \frac{1}{2} r \sqrt{3}}{r} = \frac{1}{2} c \sqrt{3},$$

folglich daß $\Delta = \frac{1}{2} c \, . \, BD = \frac{1}{2} c \times \frac{1}{2} c \sqrt{3} = \frac{1}{4} c^2 \times \sqrt{3} = (\frac{1}{2} c)^2 \times \sqrt{3}$.

Diese nämliche Formel erhält man auch, wenn man aus den Seiten $AB = c$ und $AD = \frac{1}{2} c$ die Höhe BD berechnet; es ist (I. §. 98.)

$$BD = \sqrt{(AB^2 - AD^2)} = \sqrt{(c^2 - \frac{1}{4} c^2)} = \sqrt{\frac{3}{4} c^2} = \frac{1}{2} c \sqrt{3},$$

und deßwegen wieder $\Delta = \frac{1}{2} c \times \frac{1}{2} c \sqrt{3} = \frac{1}{4} c^2 \times \sqrt{3} = (\frac{1}{2} c)^2 \times \sqrt{3}$.

§. 111.

Beispiele zur Uebung.

I. Beispiel:

Es sei in einem gleichschenklichten Dreiecke (Fig. 34.) der Winkel C an der Grundlinie $= 48^{\circ} \, 24$, und der Schenkel c oder eine der zwei gleichen Seiten $= 236$ Schuh, und man soll daraus die Grundlinie b, und den Winkel B an der Spitze sammt dem Flächeninhalte bestimmen.

Auflösung:

1) Aus dem gegebenen Winkel C ist auch A bekannt, da $A = C$, also A ebenfalls $= 48^{\circ} \, 24'$, und daraus findet man auch den Winkel B; es ist $B = 180^{\circ} - 2 \, (48^{\circ} \, 24') = 180^{\circ} - 96^{\circ} \, 48' = 83^{\circ} \, 12'$, weßhalb $\frac{1}{2} B = 41^{\circ} \, 36'$.

2) Aus dem Schenkel c, und aus dem so eben gefundenen Winkel B berechne man die Grundlinie b; es ist (§. 110. a.)

$$b = \frac{2c \, . \, \text{Sin.} \, \frac{1}{2} B}{r},$$

also Log. b = Log. 2c + Log. Sin. ½B — Log. r.

Nun

Nun ist, weil c = 236 Sch., und B = 83° 12', also 2c = 472 Sch. und ½ B = 41° 36',

Log. 2c = 2,6739420,
Log. Sin. ½ B = 9,8221198,

$$\text{also Log. } \left(\frac{2c \,.\, \text{Sin. } \tfrac{1}{2}B}{r}\right) = 2{,}4960618 = \text{Log. } b$$
$$= \text{Log. } 313{,}37.$$

Es beträgt demnach die Basis beinahe 313,37 Schuh = 313 Sch. 3 Z. 7 Linien.

3) Aus dem Winkel A und der Seite AB oder c berechne man das Perpendikel BD, welches die Höhe des Dreieckes ist; es ist (§. 110. b.)

$$BD = \frac{c \,.\, \text{Sin. } A}{r},$$

also Log. BD = Log. c + Log. Sin. A — Log. r.

Nun ist, weil c = 236 Sch., und der Winkel A = 48° 24',

Log. c = 2,3729120,
Log. Sin. A = 9,8737844,

---

also Log. BD = 12,2466964 — 10
= 2,2466964 = Log. 176,48.

Aus der bekannten Höhe des Dreieckes BD, und der bekannten Grundlinie AC oder b berechne man den Flächeninhalt des Dreieckes; es ist (I. §. 156.)

$$\triangle = \frac{BD \times AC}{2},$$

also Log. △ = Log. BD + Log. b — Log 2.
= Log. BD + Log. b + Compl. dec. Log. 2.

Nun ist Log. b = Log. 313,37 = 2,4960618,
dann Log. BD = Log. 176,48 = 2,2466964,
und Compl. dec. Log. 2 = 9,6989700 — 10,

$$\text{also Log. } \left(\frac{BD \times AC}{2}\right) = 14{,}4417282 - 10$$
$$= 4{,}4417282 = \text{Log. } 27652{,}1.$$

Der Flächeninhalt dieses Dreieckes beträgt daher beinahe 27652,1 □ Fuß, oder 276 □ Ruthen, 52 □ Fuß und 10 □ Zoll.

II. Beispiel:

Wenn im gleichschenklichten Dreiecke ein Schenkel $c = 458$ Schuh, und die Grundlinie $b = 596$ Schuh, wie groß sind die Winkel und wie groß ist der Flächeninhalt desselben?

Auflösung:

1) Aus diesen beiden gegebenen Seiten berechne man zuerst den Winkel B an der Spitze (§. 34.); es ist (§. 110. b.)

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2} B = \frac{\tfrac{1}{2} b \cdot r}{c},$$

also $\text{Log. Sin. } \tfrac{1}{2} B = \text{Log. } r + \text{Log. } \tfrac{1}{2} b - \text{Log. } c.$

Nun ist, weil $c = 458$ Sch., dann $b = 596$ Sch., und $\tfrac{1}{2} b = 298$ Sch.

$$\begin{aligned} \text{Log. } r &= 10, \\ \text{Log. } \tfrac{1}{2} b &= 2,4742163, \\ \text{Compl. dec. Log. } c &= 7,3391345 - 10, \\ \hline \end{aligned}$$

also $\text{Log. Sin. } \tfrac{1}{2} B = 19,8133508 - 10$ $= 9,8133508 = \text{Log. Sin. } 40^\circ\ 35'\ 28''$, somit der Winkel $\tfrac{1}{2} B = 40^\circ\ 35'\ 28''$, und $B = 81^\circ\ 10'\ 56''$.

2) Aus dem Winkel B lassen sich die beiden übrigen Winkel A und C berechnen (I. §. 43. Zus. III.); es ist $A = 49^\circ\ 24'\ 32''$ und $C = 49^\circ\ 24'\ 32''$.

3) Endlich bestimme man aus den bekannten Stücken den Flächeninhalt des Dreieckes.

a) Bestimmt man diesen aus den bekannten Seiten b und c und aus dem Winkel A, so ist (§. 110. c.)

$$\triangle = \frac{\tfrac{1}{2} b \times c \cdot \text{Sin. } A}{r},$$

also $\text{Log. } \triangle = \text{Log. } \tfrac{1}{2} b + \text{Log. } c + \text{Log. } \left(\frac{\text{Sin. } A}{r}\right).$

Nun ist, weil $c = 458$ Schuh, dann $b = 596$ Sch., und $A = 49^\circ\ 24'\ 32''$,

$$\text{Log. } \tfrac{1}{2} b = 2{,}4742163,$$
$$\text{Log. } c = 2{,}6608655,$$
$$\text{Log. } \left(\frac{\text{Sin. A}}{r}\right) = 9{,}8804548 - 10,$$

also $\text{Log. } \triangle = 15{,}0155366 - 10$
$= 5{,}0155366 = \text{Log. } 103642{,}2.$

b) Berechnet man den Flächeninhalt aus dem Schenkel $c = 458$ Sch., und aus der Grundlinie $b = 596$ Sch., so ist (§. 110. c.)

$$\triangle = \tfrac{1}{2} b \times \sqrt{((c + \tfrac{1}{2} b)(c - \tfrac{1}{2} b))},$$

und $\text{Log. } \triangle = \text{Log. } \tfrac{1}{2} b$

$$+ \frac{\text{Log. } (c + \tfrac{1}{2} b) + \text{Log. } (c - \tfrac{1}{2} b)}{2}.$$

Nun ist $c + \tfrac{1}{2} b = 458 + 298 = 756$, und $c - \tfrac{1}{2} b = 458 - 298 = 160$, mithin

$$\text{Log. } \sqrt{((c + \tfrac{1}{2} b)(c - \tfrac{1}{2} b))} = \text{Log. } \sqrt{(756 \times 160)}$$
$$= \frac{\text{Log. } 756 + \text{Log. } 160}{2} = 2{,}5413209,$$

dann $\text{Log. } \tfrac{1}{2} b = 2{,}4742163,$

also $\text{Log. } \triangle = 5{,}0155372$
$= \text{Log. } 103642{,}2.$

c) Bestimmt man endlich den Flächeninhalt des Dreieckes aus der Grundlinie $b = 596$ Sch. und dem anliegenden Winkel $A = C = 49^{\circ}\ 24'\ 32''$, so ist (§. 110. c.)

$$\triangle = \tfrac{1}{4} b^2 \,.\, \frac{\text{Tang. A}}{r} = (\tfrac{1}{2} b)^2 \times \frac{\text{Tang. A}}{r},$$

und $\text{Log. } \triangle = \text{Log. } \tfrac{1}{2} b \times 2 + \text{Log. } \dfrac{\text{Tang. A}}{r}.$

Nun ist

$\text{Log. } \tfrac{1}{2} b = 2{,}4742163$
(Arithm. IV. §. 58.) $\times 2$

also $\text{Log. } (\tfrac{1}{2} b)^2 = 4{,}9484326$

dann $\text{Log. } \left(\dfrac{\text{Tang. A}}{r}\right) = 10{,}0671030 - 10$

mithin $\text{Log. } \triangle = 15{,}0155356 - 10$
$= 5{,}0155356 = \text{Log. } 103642.$

Es beträgt demnach der Flächeninhalt dieses gleichschenklichten Dreieckes immerhin beinahe 103642 □ Fuß.

III. Beispiel:

Man soll den Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreieckes bestimmen, dessen Seite 538 Fuß hält.

Auflösung:

Nach der im Zusatze des §. 110. aufgestellten Formel ist

$$\triangle = \tfrac{1}{4}c^2 \times \sqrt{3} = (\tfrac{1}{2}c)^2 \times \sqrt{3},$$

und $\text{Log.}\ \triangle = \text{Log.}\ \tfrac{1}{2}c \times 2 + \text{Log.}\ \sqrt{3}.$

Nun ist, weil $c = 538$ und $\tfrac{1}{2}c = 269$,

$\text{Log.}\ \tfrac{1}{2}c = 2{,}4297523$

(Arithm. IV. §. 58.) $\times\ 2$

also $\text{Log.}\ \tfrac{1}{4}c^2 = \text{Log.}\ (\tfrac{1}{2}c)^2 = 4{,}8595046$

dann $\text{Log.}\ \sqrt{3} = 0{,}2385606$

folglich $\text{Log.}\ \triangle = 5{,}0980652 = \text{Log.}\ 125333.$

Der Flächeninhalt dieses gleichseitigen Dreieckes beträgt beinahe 125333 □ Fuß.

Anmerkung: 1) Im vorstehenden zweiten Beispiele habe ich aus den bekannten Seiten b und c nach der im vorigen Hauptstücke bei der Abhandlung über die trigonometrischen Tabellen angegebenen Verfahrungsweise die drei Winkel des Dreieckes zur größeren Genauigkeit bis auf Sekunden angegeben, und dabei den Flächeninhalt desselben durch verschiedene Formeln bestimmt, damit man sehe, wie man diesen auf verschiedene Art aus den bekannten Stücken berechnen kann, ohne daß geradezu alle Seiten und Winkel des Dreieckes gegeben oder berechnet sind.

2) Weil (Fig. 34.) der Winkel $p = \frac{1}{2}B$ (I. §. 36. Zus. II.), und $A + p = A + \frac{1}{2}B = 90$ Grad (I. §. 43. Zus. V.), so ist $\frac{1}{2}B$ das Komplement zu A (§. 59.), und deßhalb $\text{Sin.}\ A = \text{Cosin.}\ \frac{1}{2}B$, wie auch $\text{Tang.}\ A = \text{Cotang.}\ \frac{1}{2}B$ (§. 60.)

Setzt man nun $\text{Cosin.}\ \frac{1}{2}B$ anstatt Sin. A, und $\text{Cotang.}\ \frac{1}{2}B$ anstatt Tang. A, so erhält man Formeln, nach welchen man aus dem Winkel B an der Spitze, und aus dem Schenkel c und der Grundlinie b den Flächeninhalt des gleichschenklichten Dreieckes berechnen kann. Es ist nämlich (§. 110. c.)

$$\Delta = \frac{b \,.\, c \,.\, \text{Sin. } A}{2r},$$

und $\Delta = \frac{1}{4} b^2 \,.\, \frac{\text{Tang. } A}{r},$

daher auch $\Delta = \frac{b \,.\, c \,.\, \text{Cosin. } \frac{1}{2} B}{2r},$

und $\Delta = \frac{1}{4} b^2 \,.\, \frac{\text{Cotang. } \frac{1}{2} B}{r}.$

Drückt man diese Formeln in Logarithmen aus, so findet man, daß

$$\text{Log. } \Delta = \text{Log. } \tfrac{1}{2} b + \text{Log. } c + \text{Log. Cosin. } \tfrac{1}{2} B - \text{Log. } r,$$

und $\text{Log. } \Delta = \text{Log. } \frac{1}{4} b^2 + \text{Log. } \left(\frac{\text{Cotang. } \frac{1}{2} B}{r}\right)$

$$= \text{Log. } \tfrac{1}{2} b \times 2 + \text{Log. Cotang. } \tfrac{1}{2} B - \text{Log. } r.$$

II. Abschnitt.

Von der Auflösung der Dreiecke überhaupt.

I.

Lehrsätze zur Auflösung der Dreiecke überhaupt.

§. 112.

I. Lehrsatz:

In jedem Dreiecke verhalten sich die Seiten zu einander, wie die Sinus der ihnen entgegenstehenden Winkel; das ist, wenn a, b und c die Seiten, und A, B und C die opponirten Winkel bezeichnen,

$$a : b = \text{Sin. } A : \text{Sin. } B,$$

dann $a : c = \text{Sin. } A : \text{Sin. } C,$

und $b : c = \text{Sin. } B : \text{Sin. } C.$

Beweis:

1) Es sei (Fig. 35.) das Dreieck ABC gegeben, bei welchem A, B und C die Winkel, und a, b und c

der Ordnung nach die ihnen opponirten Seiten BC, AC und AB bezeichnen (§. 103. b);

2) Man beschreibe um das Dreieck einen Kreis (I. §. 120.), es werden dadurch alle Winkel desselben Peripheriewinkel (I. §. 59. b.), und jede Dreiecksseite wird die Sehne des Bogens, der zu ihrem opponirten Winkel gehört;

3) Jeder Peripheriewinkel hat zum Sinus die halbe Sehne seines Bogens (§. 63 und §. 65. Zus.), daher ist Sin. A = ½ BC = ½ a, dann Sin. *B* = ½ AC = ½ b, und Sin. C = ½ A*B* = ½ c;

4) Bezeichnet man die gleich großen Winkel, für welche in den trigonometrischen Tabellen nach dem angenommenen Halbmesser r die Sinus berechnet sind, mit m, p und q, so verhält sich nach dem im §. 81. aufgestellten Lehrsatze, da A = m, dann *B* = p und C = q,

Sin. A : Sin. *B* = Sin. m : Sin. p,
ferner Sin. A : Sin. C = Sin. m : Sin. q,
und Sin. *B* : Sin. C = Sin. p : Sin. q;

mithin nach Nro. 3.

½ a : ½ b = Sin. m : Sin. p,
dann ½ a : ½ c = Sin. m : Sin. q,
und ½ b : ½ c = Sin. p : Sin. q.

5) Wenn man bei diesen Proportionen allemal die Glieder des ersten Verhältnisses mit der Zahl 2 multiplizirt (Arithm. IV. §. 41.), und man anstatt m, p und q die gleichen Winkel A, *B* und C wieder setzt, so findet man, daß sich verhält

a : b = Sin. A : Sin. *B*,
dann a : c = Sin. A : Sin. C,
und b : c = Sin. *B* : Sin. C;

das ist, in einem jeden Dreiecke verhalten sich die Seiten, wie die Sinus der ihnen opponirten Winkel, oder, die Sinus der Winkel sind mit den gegenüberstehenden Seiten gerade proportionirt.

Zusatz: Wie überhaupt bei jeder Proportion (Arithm. IV. §. 36.), so kann man auch hier aus drei gegebenen Gliedern das vierte unbekannte Glied finden. Wenn demnach nebst zweien Seiten ein Winkel

gegeben ist, der einer dieser Seiten gegenüber steht, so kann man den Winkel finden, welcher der anderen dieser zweien gegebenen Seiten opponirt ist; und wenn nebst zweien Winkeln eine Seite gegeben ist, die einem dieser Winkel gegenübersteht, so kann man jene Seite berechnen, die dem anderen dieser zwei gegebenen Winkel gegenüber ist.

Anmerkung: Zieht man (Fig. 35.) vom Zentrum D auf die Dreiecksseiten als Sehnen des Kreises die Radien DF, dann DH und DP senkrecht, so ist BM $= \frac{1}{2}$ BC $= \frac{1}{2}$ a, dann AE $= \frac{1}{2}$ AC $= \frac{1}{2}$ b, und AG $= \frac{1}{2}$ AB $= \frac{1}{2}$ c (I. §. 56.); nun ist BM $=$ Sin. BDP $=$ Sin. A, dann AE $=$ Sin. ADF $=$ Sin. B, und AG $=$ Sin. ADH $=$ Sin. C (§. 57. a. wie auch I. §. 71 und 36. Zus. II.), daher ersieht man wieder, daß Sin. A $= \frac{1}{2}$ BC $= \frac{1}{2}$ a, dann Sin. B $= \frac{1}{2}$ AC $= \frac{1}{2}$ b, und Sin. C $= \frac{1}{2}$ AB $= \frac{1}{2}$ c (§. 63 und 65. Zus.).

§. 113.

II. Lehrsatz:

Wenn man in einem Dreiecke von dem Endspunkte einer Seite auf die ihr anliegende Seite oder auf deren Verlängerung ein Perpendikel zieht, so verhält sich

A) die erste Seite zum anliegenden Stücke der anderen Seite oder zu deren Verlängerung, wie der Radius zum Kosinus des von diesen zwei Seiten eingeschlossenen Winkels; und

B) es verhält sich auch jene erste Seite zum gezogenen Perpendikel, wie der Radius zum Sinus des nämlichen, von diesen Seiten eingeschlossenen Winkels; das ist (Fig. 36 und 37.),

c : AD $=$ r : Cosin. A,

und c : *B*D $=$ r : *S*in. A.

Beweis von A.

1) Es sei (Fig. 36 und 37.) das Dreieck *AB*C

gegeben, und man ziehe von B auf AC oder auf die Verlängerung von AC das Perpendikel BD;

2) Weil auf diese Weise das Dreieck ABD wegen des rechten Winkels bei D rechtwinklicht wird, so verhält sich (§. 104.)

$$AB : AD = r : \text{Cosin. } A \text{ (Fig. 36.)};$$

3) Diese nämliche Proportion gilt auch für den zweiten Fall, wenn das Perpendikel ausserhalb des Dreieckes fällt (Fig. 37.), indem da die Nebenwinkel $m + n = 180$ Grad, und Cosin. $n =$ Cosin. m $=$ Cosin. A (§. 69. Zus.); daher verhält sich in beiden Fällen

$$c : AD = r : \text{Cosin. } A.$$

Beweis von B.

Weil in beiden Fällen das Dreieck BAD rechtwinklicht ist, und im zweiten Falle die Nebenwinkel $m + n = 180$ Grad, so ist $Sin.\ n = Sin.\ m$ $= Sin.\ A$ (§. 62. Zus. III.), und es verhält sich auch (§. 104.)

$$AB : BD = r : Sin.\ A \text{ (Fig. 36.)},$$

und $AB : BD = r : Sin.\ n$ (Fig. 37.),

mithin wieder $AB : BD = r : Sin.\ A$,

oder $c : BD = r : Sin.\ A$.

I. Zusatz: Nach den Proportionen dieses Lehrsatzes kann man in beiden Fällen aus den Seiten AB und AC, und aus dem von ihnen eingeschlossenen Winkel A sowohl das Perpendikel BD, als auch die Linie AD berechnen, welche im ersten Falle, wenn der Winkel A spitzig, ein Theil von AC, und im zweiten Falle, wenn A stumpf ist (I. §. 33. Zus. VIII. b und c.), die Verlängerung von CA ist (Fig. 36 und 37.); indem

$$AB : AD = r : \text{Cosin. } A,$$

und $AB : BD = r : Sin.\ A$,

$$\text{also } AD = \frac{AB \times \text{Cosin. } A}{r} = \frac{c\ .\ \text{Cosin. } A}{r},$$

und $BD = \frac{AB \times Sin.\ A}{r}$

$= \frac{c\ .\ Sin.\ A}{r}$ (Arithm. IV. §. 36.).

II. Zusatz: Aus den beiden Linien AC und AD kann man allemal CD finden. Es ist im ersten Falle (Fig. 36.), wenn der Winkel A spitzig ist, CD $= AC - AD$, und im zweiten Falle (Fig. 37.), wenn A stumpf ist, CD $= CA + AD$.

Diese Summe erhält man auch für die Bestimmung im zweiten Falle, wenn man den Kosinus des stumpfen Winkels A, welcher negativ ist (§. 71.), mit dem Zeichen (—) setzt (Arithm. III. §. 45. Lehrs. III. A.); indem CD $= AC - \left(\frac{-\ c\ .\ Cosin.\ A}{r}\right) = AC + AD$.

III. Zusatz: Weil auf diese Weise CD und BD gefunden werden, so kann man daraus (Fig. 36. und 37.) im rechtwinklichten Dreiecke CDB den Winkel C und die Seite CB (§. 107. a.), und aus A und C den Winkel B finden (I. §. 43. Zus. I.), gleichwie man auch aus AC und BD den Flächeninhalt des Dreieckes berechnen kann (I. §. 156.).

IV. Zusatz: Will man (Fig. 36 und 37.) aus den Seiten AB und AC und dem eingeschlossenen Winkel A nur den Flächeninhalt des Dreieckes berechnen, so ist derselbe $= \frac{1}{2}\ AC \times BD$, nun ist $\frac{1}{2}\ AC = \frac{1}{2}$b, und nach dem vorstehenden I. Zusatze dieses §. ist $BD = \frac{c\ .\ Sin.\ A}{r}$, daher ist

$$\triangle = \tfrac{1}{2} b\ .\ \frac{c\ .\ Sin.\ A}{r} = \frac{\tfrac{1}{2} b\ .\ c\ .\ Sin.\ A}{r}$$

$$= \tfrac{1}{2} bc \times \frac{Sin.\ A}{r}.$$

V. Zusatz: Aus dem aufgestellten Lehrsatze, und dem beigefügten I. Zusatze findet man auch, daß

$$\text{Tang. } C = \frac{c \,.\, Sin.\, A}{br - c \,.\, Cosin.\, A} \times r = c \,.\, Sin.\, A : \left(b - \frac{c \,.\, Cosin.\, A}{r}\right).$$

Denn es ist nach dem I. Zusatze dieses §., wenn der Winkel A spitzig ist (Fig. 36.), $CD = AC - AD = b - \frac{c \,.\, Cosin.\, A}{r} = \frac{br - c \,.\, Cosin.\, A}{r}$; ist aber der Winkel A stumpf (Fig. 37.), so ist $CD = CA + AD$; nun ist in diesem Falle der Kosinus von A negativ (§. 71.), daher ist wieder $CD = b + \left(-\frac{c \,.\, Cosin.\, A}{r}\right) = b - \frac{c \,.\, Cosin.\, A}{r} = \frac{br - c \,.\, Cosin.\, A}{r}$.

Nach §. 105. verhält sich

$$CD : BD = r : \text{Tang. } C.$$

Setzt man anstatt CD den so eben gefundenen Werth, nämlich $\frac{br - c \,.\, Cosin.\, A}{r}$, und $\frac{c \,.\, Sin.\, A}{r}$ anstatt BD (§. 113. Zus. I.), so ist, weil nach der Proportion $\text{Tang. } C = \frac{BD \,.\, r}{CD}$ (Arithm. IV. §. 36.),

$$\text{Tang. } C = \frac{c \,.\, Sin.\, A \,.\, r}{r} : \left(\frac{br - c \,.\, Cosin.\, A}{r}\right)$$

$$= \frac{c \,.\, Sin.\, A}{br - c \,.\, Cosin.\, A} \times r = \frac{c \,.\, Sin.\, A \,.\, r}{br - c \,.\, Cosin.\, A}$$

$= c \,.\, Sin.\, A : \left(b - \frac{c \,.\, Cosin.\, A}{r}\right)$, wenn man nämlich wieder $b - \frac{c \,.\, Cosin.\, A}{r}$ anstatt $\frac{br - c \,.\, Cosin.\, A}{r}$ setzt.

Anmerkung: 1) Nach der vorstehenden, im V. Zusatze angeführten Formel könnte man aus den Seiten b und c und dem eingeschlossenen Winkel A ebenfalls den Winkel C, und daraus die übrigen Stücke bestimmen; es wäre aber die wirkliche Berechnung beschwerlich, da sich bei der Differenz br — c . Cosin. A die Logarith-

men nicht anwenden lassen; außer man wählt die Formel nach dem letzten Ausdrucke, nach welchem

$$\text{Tang. } C = c \cdot \text{Sin. } A : \left(b - \frac{c \cdot \text{Cosin. } A}{r}\right).$$

In dieser Formel muß man den Quotienten $\frac{c \cdot \text{Cosin. } A}{r}$ in einer gewöhnlichen oder natürlichen Zahl, die auch zur Unterscheidung von den Logarithmen eine absolute Zahl genannt wird, von der Seite b abziehen, oder dazu addiren, je nachdem der Winkel A spitzig oder stumpf ist, damit so der ganze Ausdruck $\left(b - \frac{c \cdot \text{Cosin. } A}{r}\right)$ in einer einzigen natürlichen Zahl dargestellt wird, und man dann die weitere Rechnung mit Logarithmen ausführen kann.

2) Weil im vorigen Abschnitte zur Auflösung der rechtwinklichten und gleichschenklichten Dreiecke besondere Lehrsätze aufgestellt wurden, so ist hier die Voraussetzung, daß der eingeschlossene Winkel A kein rechter, somit ein spitziger oder stumpfer Winkel ist, und daß die einschließenden Seiten AC und AB oder b und c ungleich sind. Um für diese beiden Fälle die Figur auf die einfachste Weise zu konstruiren, nimmt man die größere Seite als Basis an, und zieht auf sie oder auf ihre Verlängerung vom Endspunkte der anderen Seite, welche kleiner ist, das Perpendikel.

§. 114.

III. Lehrsatz:

In einem jeden Dreiecke verhält sich die Summe zweier Seiten zu ihrer Differenz, wie die Tangens der halben Summe ihrer opponirten Winkel zur Tangens der halben Differenz eben dieser Winkel; das ist,

$$b + c : b - c = \text{Tang. } \frac{B + C}{2} : \text{Tang. } \frac{B - C}{2}.$$

Beweis:

1) Es sei (Fig. 38.) das Dreieck *ABC* gegeben, und man beschreibe mit der Seite *AB*, die kleiner ist

als AC, von A aus einen Kreis, es schneidet dessen Peripherie die größere Seite AC im Punkte F;

2) Man ziehe die Sehne BF, und ziehe durch C die Linie CE mit BF parallel; dann verlängere man FA zu einem Durchmesser des Kreises, und ziehe durch D und B eine gerade Linie, bis diese Linie CE in einem Punkte E schneidet (I. §. 41. Zus. I.);

3) Die Linie CD ist $= CA + AD = CA + AB$, da $AD = AB$ (I. §. 14. Zus. IV.), mithin ist CD $=$ b $+$ c (§. 103. b.);

4) Die Linie FC ist $= AC - AF = AC - AB = b - c$;

5) Beschreibt man mit CE vom Punkte C einen Kreis, so wird EB die Tangens des Winkels $ECB = s$, und ED wird die Tangens des Winkels ECD $= g + s$ (§. 58. a.);

6) Der Winkel m ist beim Dreiecke ABC als dessen äusserer Winkel $= B + C$ (I. §. 43. Zus. VI.), und m ist auch $= 2n$ (I. §. 43. Zus. VII.), also $2n = B + C$, und $n = \frac{B + C}{2}$; ferner ist $n = g + s$ (I. §. 41.), folglich ist auch $g + s = \frac{B + C}{2}$, und die Linie ED, welche die Tangens von $g + s$ ist (Nro. 5.), ist auch die Tangens von $\frac{B + C}{2}$;

7) Da $g + s = \frac{B + C}{2} = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$, so ist $s = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C - g = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C - C = \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}C = \frac{B - C}{2}$; und die Linie EB, welche die Tangens von s ist (Nro. 5.) ist auch die Tangens von $\frac{B - C}{2}$;

8) Weil endlich im Dreiecke CDE die Linie BF zu CE parallel gezogen ist (Nro. 2.), so verhält sich (I. §. 81.)

$$CD : CF = ED : EB.$$

Es ist aber $CD = b + c$, und $CF = b - c$ (Nro. 3. und 4.); ferner ist $ED = Tang. \frac{B + C}{2}$, und $EB = Tang. \frac{B - C}{2}$ (Nro. 6 und 7.), daher verhält sich auch

$$b + c : b - c = Tang. \frac{B + C}{2} : Tang. \frac{B - C}{2},$$

das heißt, in einem jeden Dreiecke verhält sich die Summe zweier Seiten zu ihrer Differenz, wie die Tangens der halben Summe ihrer opponirten Winkel zur Tangens der halben Differenz eben dieser Winkel.

I. Zusatz: Wenn der Winkel A bekannt ist, so weiß man auch die Summe $B + C$, indem $B + C = 180^\circ - A$ (I. §. 43. Zus. I.), und nach dem Lehrsatze findet man die Differenz $B - C$, welche positiv ist, weil nach der Annahme $AC > AB$, und deßhalb $B > C$ (I, §. 30.). Wenn aber die Summe und die Differenz zweier Größen bekannt ist, so findet man diese letzteren selbst, wenn man zur halben Summe die halbe Differenz addirt, und von der halben Summe die halbe Differenz abzieht (Arithm. III. §. 68.).

Es ist demnach der größere Winkel $B = \frac{1}{2}(B + C) + \frac{1}{2}(B - C)$, und der kleinere Winkel C ist $= \frac{1}{2}(B + C) - \frac{1}{2}(B - C.)$.

II. Zusatz: Aus den Seiten AB und AC, und den bekannten Winkeln, A, B und C kann man nach den vorausgehenden Lehrsätzen die dritte Seite BC und den Flächeninhalt des Dreieckes berechnen.

Anmerkung: 1) Es ist bei diesem Lehrsatze, wie überhaupt in diesem ganzen Abschnitte, die Voraussetzung, daß das Dreieck ungleichseitig ist, und keinen rechten Winkel hat; deßwegen sind hier in §. 113. die Seiten AB und AC ungleich, und der eingeschlossene Winkel A ist schief (I. §. 8. b.).

2) Will man aus den Seiten AC und AB, oder aus b und c, und aus dem eingeschlossenen Winkel A nur den Flächeninhalt des Dreieckes bestimmen, so verfährt man am Kürzesten, wenn man die im IV. Zusatze des §. 113. aufgestellte Formel benützt, nach welcher

$$\Delta = \tfrac{1}{2} b . \frac{c . \text{Sin. } A}{r} = \frac{\tfrac{1}{2} b . c . \text{Sin. } A}{r} =$$

$$\tfrac{1}{2} bc \times \frac{\text{Sin. } A}{r}.$$

§. 115.

IV. Lehrsatz:

In jedem Dreiecke ist das Quadrat einer Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden übrigen Seiten, davon abgezogen den Quotienten, den man erhält, wenn man das doppelte Produkt dieser nämlichen zwei Seiten in den Kosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels mit dem Radius oder Sinustotus dividirt; das ist,

$$a^2 = b^2 + c^2 - \frac{2 bc . \text{Cosin. } A}{r}.$$

Beweis:

1) Es sei (Fig. 36. und 37.) das Dreieck ABC gegeben, bei welchem die Winkel durch A, B und C ausgedrückt sind, und die opponirten Seiten, wie gewöhnlich, durch a, b und c bezeichnet werden (§. 103. b.);

2) Im rechtwinklichten Dreiecke CBD ist BC^2 oder $a^2 = BD^2 + DC^2$ (I. §. 97.).

3) Nun ist nach dem im V. Zusatze des §. 113. Angeführten $BD = \frac{c . \text{Sin. } A}{r}$, und $CD = \frac{br - c . \text{Cosin. } A}{r}$, mithin (Arithm. III. §. 72. und IV. §. 1.), $BD^2 = \frac{c^2 . \text{Sin. } A^2}{r^2}$, und $CD^2 = \frac{b^2r^2 - 2bcr . \text{Cosin. } A + c^2 . \text{Cosin. } A^2}{r^2}$;

4) Setzt man in der Gleichung bei Nro. 2. anstatt BD^2 und CD^2 diese Werthe, und beim Ausdrucke

$c^2 . \text{Sin.} A^2 + c^2 . \text{Cosin.} A^2 = c^2 \times (\text{Sin.} A^2 + \text{Cosin.} A^2)$ das Quadrat des Radius oder r^2 (§. 70. Zus. I.), so findet man, daß

$$a^2 = \frac{c^2 . \text{Sin.} A^2}{r^2} + \frac{b^2 r^2 - 2bcr . \text{Cosin.} A}{r^2}$$

$$+ \frac{c^2 . \text{Cosin.} A^2}{r^2} = c^2 \left(\frac{\text{Sin.} A^2 + \text{Cosin.} A^2}{r^2}\right)$$

$$+ \frac{b^2 r^2 - 2bcr \text{ Cosin.} A}{r^2} = \frac{c^2 r^2}{r^2}$$

$$+ \frac{b^2 r^2 - 2bcr . \text{Cosin.} A}{r^2},$$ weßhalb $a^2 = b^2 + c^2$

$$- \frac{2bc . \text{Cosin.} A}{r}$$ (Arithm. III. §. 66. d.).

I. Zusatz: Aus den nämlichen Gründen ist

$$b^2 = a^2 + c^2 - \frac{2ac . \text{Cosin.} B}{r},$$

und $c^2 = a^2 + b^2 - \frac{2ab . \text{Cosin.} C}{r}$.

II. Zusatz: Will man aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel nach den im Lehrsatze und I. Zusatze aufgestellten Formeln die dritte Dreiecksseite finden, so zieht man allemal auf beiden Seiten die Quadratwurzel aus; es ist

$$a = \sqrt{\left(b^2 + c^2 - \frac{2bc . \text{Cosin.} A}{r}\right)},$$

dann $b = \sqrt{\left(a^2 + c^2 - \frac{2ac . \text{Cosin.} B}{r}\right)},$

und $c = \sqrt{\left(a^2 + b^2 - \frac{2ab . \text{Cosin.} C}{r}\right)}.$

III. Zusatz: Nach diesem Lehrsatze kann man aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die dritte Dreiecksseite, und dann aus dieser nach §. 112. die übrigen zwei Winkel berechnen, während der Flächeninhalt durch die im IV. Zusatze des §. 113. aufgestellte Formel aus den gegebenen Stücken bestimmt werden kann.

§. 116.

V. Lehrsatz:

In einem jeden Dreiecke ist der Kosinus eines Winkels gleich dem Produkte aus dem Radius oder Sinustotus in die Summe der Quadrate der beiden einschließenden Seiten, weniger dem Quadrate der gegenüberstehenden Seite, dividirt durch das doppelte Produkt der beiden einschließenden Seiten; das ist,

$$Cosin.\, A = \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \times r.$$

Beweis:

1) Es sei (Fig. 36. und 37.) das Dreieck *ABC* gegeben, bei welchem die Winkel und Seiten auf die vorige Weise bezeichnet werden.

2) Nach dem im §. 115. aufgestellten Lehrsatze ist

$$a^2 = b^2 + c^2 - \frac{2bc\,.\,Cosin.\, A}{r}.$$

Sucht man nun hier den Werth von Cosin. *A* (Arithm. III. §. 98.), so ist

$$Cosin.\, A = \frac{b^2 r + c^2 r - a^2 r}{2bc}$$

$$= \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \times r = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\, r.$$

I. Zusatz: Aus den nämlichen Gründen ist auch

$$Cosin.\, B = \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right) \times r = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\, r,$$

und

$$Cos.\, C = \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) \times r = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\, r$$

(Arithm. III. §. 80. Anmerk. 3.).

II. Zusatz: Nach diesem Lehrsatze kann man aus den drei bekannten Seiten eines Dreieckes die Winkel, und daraus nach der im IV. Zusatze des §. 113. aufgestellten Formel den Flächeninhalt desselben berechnen.

§. 117.

§. 117.

VI. Lehrsatz:

Man erhält den Sinus eines jeden Winkels, wenn man die Summe aller Dreiecksseiten mit der Summe eines jeden Paares derselben, weniger der jedesmal noch übrigen dritten Seite multiplizirt, und die Quadratwurzel dieses Produktes sowohl noch mit dem Radius oder Sinustotus multiplizirt, als auch mit dem doppelten Produkte der diesen Winkel einschließenden Seiten dividirt; das ist,

$$\text{Sin.}\,A = \frac{\sqrt{[(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)]}}{2bc}\,r.$$

Beweis:

1) Es sei (Fig. 36. und 37.) das Dreieck ABC gegeben, bei welchem die Seiten und Winkel auf die bekannte Weise bezeichnet werden;

2) Das Quadrat des Sinus eines jeden Winkels ist gleich dem Quadrate des Radius, weniger dem Quadrate des Kosinus des nämlichen Winkels (§. 70. Zus. 1.), oder $\text{Sin.}\,A^2 = r^2 - \text{Cosin.}\,A^2$;

3) Die Differenz $r^2 - \text{Cosin.}\,A^2$ löset man in Faktoren auf (Arithm. III. §. 87. VI.), es ist

$$r^2 - \text{Cosin.}\,A^2 = (r + \text{Cosin.}\,A) \times (r - \text{Cosin.}\,A);$$

4) Weil nach §. 116.

$$\text{Cosin.}\,A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\,r,\ \text{so ist}$$

$$r + \text{Cosin.}\,A = r + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\,r$$

$$= \frac{2bcr + (b^2 + c^2 - a^2)r}{2bc} = \left(\frac{b^2 + 2bc + c^2 - a^2}{2bc}\right) r.$$

Nun ist $(b + c)^2 = b^2 + 2bc + c^2$ (Arithm. IV. §. 1.), und $(b + c)^2 - a^2$ ist $= (b + c - a)$ $(b + c + a) = (a + b + c)\,(b + c - a)$

(Arithm. III. §. 87. VI.), weßhalb, wenn man diese gleichen Ausdrücke anstatt der vorigen setzt,

$$r + Cosin.\,A = \frac{(a + b + c)\,(b + c - a)}{2bc}\,r;$$

5) Eben so ist

$$r - Cosin.\,A = r - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) r$$

$$= \left(\frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc}\right) r$$

$$= \left(\frac{a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)}{2bc}\right) r$$

$$= \frac{a^2 - (b - c)^2}{2bc}\,r$$

$$= \frac{(a + b - c)\,(a + c - b)}{2bc}\,r.$$

Es ist nämlich hier $a^2 - b^2 + 2bc - c^2 = a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)$ (Arithm. III. §. 46. Lehrs. I.), und nach dem vorhin angeführten allgemeinen Quadrirungsgesetze $b^2 - 2bc + c^2 = (b - c)^2$, weßhalb $a^2 - b^2 + 2bc - c^2 = a^2 - (b - c)^2 = (a + b - c)\,(a + c - b)$.

6) Setzt man in der Gleichung bei Nro. 3. anstatt $r + Cosin.\,A$ und $r - Cosin.\,A$ die bei Nro. 4 und 5. gefundenen gleichen Werthe, so ist

$$Sin.\,A^2 = \frac{(a + b + c)\,(b + c - a)}{2bc}\,r$$

$$\times \frac{(a + b - c)\,(a + c - b)}{2bc}\,r$$

$$= \frac{(a+b+c)\,(b+c-a)\,(a+b-c)\,(a+c-b)}{4b^2c^2}\,r^2,$$

und deßhalb, wenn man auf beiden Seiten der Gleichung die Quadratwurzel auszieht (Arith. III. §. 70. I.),

$$Sin.\,A = \frac{\sqrt{[(a + b + c)\,(a + b - c)\,(a + c - b)\,(b + c - a)]}}{2bc}\,r.$$

I. Zusatz: Setzet man der Kürze wegen den Zähler gleich p, so ist

$\sqrt{[(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)]} = p$ und $\text{Sin.}\, A = \frac{p\,.\,r}{2\,bc}$.

II. Zusatz: Aus den nämlichen Gründen ist

$$\text{Sin.}\, B = \frac{p\,.\,r}{2\,ac},\ \text{und Sin.}\, C = \frac{p\,.\,r}{2\,ab}.$$

III. Zusatz: Wenn p die im I. Zusatze angegebene Bedeutung hat, so gibt der vierte Theil von p den Flächeninhalt des Dreieckes, das ist

$$\triangle = \frac{p}{4} = \tfrac{1}{4}p.$$

Denn (Fig. 36. und 37.) es ist

$$\triangle = \tfrac{1}{2}\, AC \times BD \text{ (I. §. 156.)},$$

$$\text{und } BD = \frac{c\,.\,\text{Sin.}\, A}{r} \text{ (§. 113. Zus. I.)},$$

$$\text{dann Sin.}\, A = \frac{p\,.\,r}{2\,bc} \text{ (Zus. I.)},$$

$$\text{also } \triangle = \tfrac{1}{2}b\,.\,\frac{c\,.\,\text{Sin.}\, A}{r} = \tfrac{1}{2}\,b\,.\,\frac{c}{r}\,.\,\text{Sin.}\, A$$

$$= \tfrac{1}{2}b\,.\,\frac{c}{r}\,.\,\frac{p\,.\,r}{2\,bc} = \frac{bcpr}{4\,bcr}$$

$$= \frac{p}{4} = \tfrac{1}{4}p \text{ (Arithm. III. §. 66. d.)}.$$

IV. Zusatz: Der Lehrsatz dieses §. dient ebenfalls, um aus den drei gegebenen Seiten eines Dreieckes die Winkel, und nach dem III. Zusatze den Flächeninhalt desselben zu berechnen.

§. 118.

VII. Lehrsatz:

In jedem Dreiecke verhält sich die größte Seite zur Summe der beiden übrigen, wie die Differenz dieser letzteren zum Stücke der größten Seite, das außerhalb der Peripherie fällt, wenn man mit

der kleinsten Seite vom Scheitel des größten Winkels aus einen Kreis beschreibt; das ist, (Fig. 39.),

$$b : c + a = c - a : AD.$$

Beweis:

1) Man beschreibe beim Dreiecke ABC dieser Figur mit der kleinsten Seite BC von B aus einen Kreis, und verlängere EB bis zur Peripherie G, es ist dann AD das Stück der größten Seite AC, welches außerhalb dieses Kreises liegt;

2) Die beiden Sekanten GA und CA stossen ausserhalb des Kreises in A zusammen, daher sind sie mit den äußeren Stücken umgekehrt proportionirt (I. §. 107.), das ist,

$$AC : AG = AE : AD;$$

3) Nun ist $AC = b$, dann $AG = AB + BG = AB + BC = c + a$, und $AE = AB - EB = AB - BC = c - a$; daher verhält sich auch

$$b : c + a = c - a : AD.$$

I. Zusatz: Zieht man vom Winkel B, welcher der größten Seite AC oder b opponirt ist, das Perpendikel BF, und von B nach D den Halbmesser BD, so wird die größte Seite AC in zwei Theile FA und FC getheilt, und $FD = FC$, da das Dreieck DBC wegen der gleichen Radien BD und BC gleichschenklicht ist (I. §. 36. Zus. II.).

Das äußere Stück AD ist $= AF - DF = AF - FC$, und $AF + FC = AC = b$, es drückt deßhalb AC oder b die Summe der beiden Theile FA und FC, und AD drückt ihre Differenz aus.

II. Zusatz: Bezeichnet man das äußere Stück AD, welches nach der Proportion des Lehrsatzes als das vierte Glied $= \frac{(c + a)(c - a)}{b}$, mit d, so ist der größere Theil $FA = \frac{1}{2}(b + d)$, und der kleinere Theil $FC = \frac{1}{2}(b - d)$, indem $\frac{1}{2}(b + d) = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}d$ die halbe Summe, und $\frac{1}{2}(b - d) = \frac{1}{2}b$

— ½ d die halbe Differenz dieser zwei Theile ist (Arithm. III. §. 68.).

III. Zusatz: Aus dem Theile *AF* und der Seite *AB* kann man den Winkel *A*, und aus *CF* und *BC* den Winkel *C* in den rechtwinklichten Dreiecken *ABF* und *BFC* berechnen; indem sich verhält (§. 104.)

$$AB : AF = r : Cosin.\ A,$$
und $CB : CF = r : Cosin.\ C$,
oder $c : \frac{1}{2}(b + d) = r : Cosin.\ A$,
und $a : \frac{1}{2}(b - d) = r : Cosin.\ C$,

weßhalb $Cosin.\ A = \frac{\frac{1}{2}(b + d)\, r}{c}$,

und $Cosin.\ C = \frac{\frac{1}{2}(b - d)\, r}{a}$.

Sind die Winkel A und C bekannt, so weiß man auch *B*, da alle drei Winkel 180° haben, und (I. §. 43. Zus. I.) daher $B = 180° - (A + C)$.

IV. Zusatz: Ist nebst den Seiten ein Winkel, etwa A bekannt, so findet man nach der im IV. Zusatze des §. 113. aufgestellten Formel den Flächeninhalt des Dreieckes, nach welcher

$$\triangle = \frac{1}{2} b \cdot \frac{c \cdot Sin.\ A}{r} = \frac{\frac{1}{2} bc \cdot Sin.\ A}{r}.$$

V. Zusatz: Will man aus den drei bekannten Seiten des Dreieckes mittels des in diesem §. aufgestellten Lehrsatzes gleich unmittelbar den Flächeninhalt berechnen, ohne vorhin einen Winkel zu bestimmen, so ist $\triangle = \frac{1}{2} b \times \sqrt{[(c + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}d)(c - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}d)]}$.

Denn (Fig. 39.) es ist (I. §. 156.)

$$\triangle = \frac{1}{2} AC \times BF = \frac{1}{2} b \times BF.$$

Nun ist $BF = \sqrt{(AB^2 - AF^2)}$ (I. §. 98.) $= \sqrt{[(AB + AF)(AB - AF)]}$ (Arithm. III. §. 87. VI.), und nach dem II. Zusatze ist $AF = \frac{1}{2}(b + d) = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}d$, weßhalb $AB + AF = c + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}d$, und $AB - AF = c - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}d$, mithin ist $BF = \sqrt{[(c + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}d)(c - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}d)]}$.

Setzt man nun in der Formel, welche den Flä-

cheninhalt des Dreieckes angibt, anstatt BF diesen gleichen Werth, so findet man, daß
$\triangle = \frac{1}{2}b \times \sqrt{[(c + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}d)(c - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}d)]}$.

Anmerkung: 1) Aus der Elementargeometrie könnte man noch mehrere Formeln zur Auflösung der Dreiecke entwickeln; es sind aber die bisher angeführten zureichend, um alle Aufgaben zu lösen, nach welchen bei den geradlinigten ebenen Dreiecken aus den gegebenen Stücken die unbekannten zu berechnen sind.

2) Die in diesem Abschnitte in Absicht auf die Dreiecke überhaupt aufgestellten Lehrsätze gelten auch für die rechtwinklichten und gleichschenklichten Dreiecke; man wendet aber dieselben bei den letzteren nicht an, weil diese bequemer nach den für sie im vorigen Abschnitte aufgestellten besonderen Lehrsätzen aufgelös't werden. Aus diesem Grunde kommen bei der Anwendung der im gegenwärtigen Abschnitte von den Dreiecken überhaupt aufgestellten Lehrsätze nur schiefwinklichte und ungleichseitige Dreiecke, das ist, nur solche vor, bei welchen kein rechter Winkel ist, und alle Seiten ungleich sind.

3) Zur Benützung dieser Lehrsätze dienen die nachstehenden Aufgaben sammt den beigefügten *Beispielen*, bei welchen zur Begründung der vorkommenden Regeln auf die Lehrsätze und die im Allgemeinen daraus abgeleiteten Auflösungen hingewiesen wird.

4) Wie in Betreff der rechtwinklichten und gleichschenklichten Dreiecke (§. 108. Anmerk. 3.), eben so werden auch hinsichtlich der Dreiecke überhaupt am Ende dieses Abschnittes in einer tabellarischen Form die Formeln zur Auflösung derselben zusammengestellt werden, um darnach bequemer die unbekannten Stücke berechnen zu können.

II.

Aufgaben zur Auflösung der Dreiecke überhaupt.

§. 119.

I. Aufgabe, aus einer bekannten Seite, und aus zwei gegebenen Winkeln den dritten Winkel und die zwei übrigen Seiten nebst dem Flächeninhalte des Dreieckes zu bestimmen.

Auflösung:

1) Es seien (*Fig.* 35.) im Dreiecke ABC die Seite AC oder b, und die zwei Winkel A und B gegeben, es ist dadurch das Dreieck bestimmt, wenn auch nicht, wie es hier der Fall ist, diese beiden Winkel der gegebenen Seite anliegen (I. §. 44. Zus. II.);

2) Man suche den dritten Winkel C, dieser ist $= 180^\circ - A - B$, oder $C = 180^\circ - (A + B)$ (I. §. 43. Zus. I.);

3) Nach dem im §. 112. aufgestellten Lehrsatze nehme man zur Bestimmung der zwei Seiten a und c jene zwei Proportionen, in welchen die gegebene Seite b vorkömmt; es verhält sich

$$b : a = \text{Sin. } B : \text{Sin. } A,$$

und $b : c = \text{Sin. } B : \text{Sin. } C,$

also $a = \dfrac{b \,.\, \text{Sin. } A}{\text{Sin. } B}$,

und $c = \dfrac{b \,.\, \text{Sin. } C}{\text{Sin. } B}$.

4) Weil auf diese Weise alle Seiten und Winkel bekannt werden, so kann man nach der im IV. Zusatze des §. 113. aufgestellten Formel den Flächeninhalt des Dreieckes bestimmen, nach welcher

$$\triangle = \tfrac{1}{2} b \times \frac{c \,.\, \text{Sin. } A}{r} = \frac{\tfrac{1}{2} bc \,.\, \text{Sin. } A}{r}.$$

5) Will man aus den gegebenen Stücken, nämlich aus der Seite b und den Winkeln A und B den Flächeninhalt bestimmen, so ist

$$\triangle = \frac{b^2 \,.\, \text{Sin. } A \,.\, \text{Sin. } (A + B)}{2r \,.\, \text{Sin. } B}.$$

Denn denkt man sich (*Fig.* 36. und 37.) von B auf AC das Perpendikel BD, so ist (I. §. 156.)

$$\triangle = \tfrac{1}{2} AC \times BD = \tfrac{1}{2} b \,.\, BD.$$

Nun ist (§. 113. Zus. I.)

$$BD = \frac{c \,.\, \text{Sin. } A}{r},$$

und nach Nro. 3. ist

$$c = \frac{b \,.\, \text{Sin. } C}{\text{Sin. } B} = \frac{b \,.\, \text{Sin. } (A + B)}{\text{Sin. } B},$$

da $C = 180^\circ - (A + B)$, und deßhalb $\text{Sin. } C = \text{Sin. } (A + B)$, es mag der Winkel C spitzig oder stumpf sein (§. 64. d. und §. 65.).

Setzt man nun anstatt c und BD die gefundenen gleichen Werthe, so findet man, daß

$$BD = \frac{b \,.\, \text{Sin. } (A + B)}{\text{Sin. } B} \times \frac{\text{Sin. } A}{r}$$

$$= \frac{b \,.\, \text{Sin. } A \,.\, \text{Sin. } (A + B)}{r \,.\, \text{Sin. } B},$$

mithin $\triangle = \frac{1}{2} b \times \frac{b \,.\, \text{Sin. } A \,.\, \text{Sin. } (A + B)}{r \,.\, \text{Sin. } B}$

$$= \frac{b^2 \,.\, \text{Sin. } A \,.\, \text{Sin. } (A + B)}{2r \,.\, \text{Sin. } B}.$$

Zusatz: Wenn nebst der Seite AC oder b die beiden anliegenden Winkel A und C gegeben sind (I. §. 22. Zus.); so sucht man aus A und C den Winkel B, welcher $= 180^\circ - (A + C)$ (I. §. 43. Zus. 1.), und bestimmt dann, wie vorhin, aus der Seite b und aus den Winkeln die anderen zwei Seiten a und c.

Setzt man in der vorstehenden, bei Nro. 5. angeführten Formel

$$\triangle = \frac{b^2 \,.\, \text{Sin. } A \,.\, \text{Sin. } (A + B)}{2r \,.\, \text{Sin. } B}$$

gleiche Werthe, nämlich Sin. C anstatt Sin. (A + B), und Sin. (A + C) anstatt Sin. B (§. 64. d. und §. 65.), so findet man die Formel, nach der man unmittelbar aus einer gegebenen Seite und den beiden bekannten anliegenden Winkeln den Flächeninhalt berechnen kann; es ist dann

$$\triangle = \frac{b^2 \,.\, \text{Sin. } A \,.\, \text{Sin. } C}{2r \,.\, \text{Sin. } (A + C)}.$$

§. 120.

II. Aufgabe, aus zwei Seiten und einem gegenüberstehenden Winkel die übrigen zwei Win-

kel, und die dritte Seite nebst dem Flächeninhalte des Dreieckes zu bestimmen.

Auflösung:

1) Es seien (*Fig.* 35.) die Seiten AC und AB oder b und c nebst dem Winkel B gegeben, welcher der Seite AC oder b gegenübersteht, und man soll daraus die Seite BC oder a, und die Winkel A und C nebst dem Flächeninhalte bestimmen;

2) Nach dem im §. 112. aufgestellten Lehrsatze wähle man jene Proportion, in welcher die drei gegebenen Stücke vorkommen; es verhält sich

$$b : c = Sin.\, B : Sin.\, C,$$

$$\text{und } Sin.\, C = \frac{c\,.\,Sin.\, B}{b} \text{ (Arithm. IV. §. 36.);}$$

3) Jeder spitzige Winkel hat mit seinem stumpfen Nebenwinkel den nämlichen Sinus (§. 62. Zus. III.); deßwegen müssen entweder die gegebenen Stücke oder andere Umstände entscheiden, welcher von diesen beiden Winkeln der gesuchte ist.

Ist die Seite b größer als c, so ist auch der Winkel B größer C (I. § 30.), und der gesuchte Winkel C ist spitzig (I. §. 28. Zus. IV.), da in diesem Falle zwei Seiten gegeben sind nebst dem Winkel, der der größeren Seite gegenübersteht, und deßhalb das Dreieck bestimmt ist (I. §. 34.).

Ist aber die Seite b kleiner als c, so ist auch der Winkel B kleiner als C, und das Dreieck ist durch die gegebenen Stücke nicht bestimmt (I. §. 35. Zus. I.). In diesem Falle gibt es für die gegebenen Stücke zwei verschiedene Dreiecke (I. §. 35.), und es muß aus anderen Umständen bekannt sein, ob man zu dem gefundenen Logarithmus des Sinus von C den entsprechenden spitzigen Winkel, welchen die Tabelle unmittelbar angibt, oder seinen stumpfen Nebenwinkel nehmen soll, den man erhält, wenn man jenen von 180 Grad abzieht (I. §. 11. Zus. III.).

4) Aus den Winkeln B und C findet man den drit-

ten Winkel; es ist dieser oder $A = 180° - (B + C)$ (I. §. 43. Zus. 1.).

5) Die dritte noch unbekannte Seite a findet man jetzt aus der Seite b und den opponirten Winkeln A und B, oder auch aus der Seite c und den opponirten Winkeln A und C; es verhält sich (§. 112.)

$$a : b = Sin.\,A \,.\, Sin.\,B,$$

und $a : c = Sin.\,A : Sin.\,C$,

weßhalb $a = \frac{b\,.\,Sin.\,A}{Sin.\,B}$,

und $a = \frac{c\,.\,Sin.\,A}{Sin.\,C}$ (Arithm. IV. §. 36.).

6) Da auf diese Weise alle Seiten und Winkel bekannt werden, so findet man den Flächeninhalt des Dreieckes nach der im §. 119. bei Nro. 4. angegebenen Formel, nach welcher

$$\triangle = \tfrac{1}{2} b \times \frac{c\,.\,Sin.\,A}{r} = \frac{\tfrac{1}{2} bc\,.\,Sin.\,A}{r}.$$

7) Ist nach Nro. 2. die Größe des Winkels C bekannt, welcher $= \frac{c\,.\,Sin.\,B}{b}$, so findet man nach der so eben angeführten Formel aus den Stücken b, c, B und C den Flächeninhalt des Dreieckes, wenn man $Sin.\,(B + C)$ anstatt $Sin.\,A$ substituirt, indem $A + (B + C) = 180$ Grad (I. §. 43.), und deßhalb $Sin.\,A = Sin.\,(B + C)$ (§. 64. d. und §. 65.).

Es ist nach jener Formel

$\triangle = \frac{\tfrac{1}{2} bc\,.\,Sin.\,A}{r}$, und deßhalb auch

$$\triangle = \frac{\tfrac{1}{2} bc\,.\,Sin.\,(B + C)}{r}.$$

§. 121.

III. Aufgabe, in einem Dreiecke aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die beiden übrigen Winkel, und die dritte Seite nebst dem Flächeninhalte zu bestimmen.

I. Auflösung:

1) Es seien (*Fig.* 36 und 37.) im Dreiecke ABC die Seiten AC und AB oder b und c nebst dem eingeschlossenen Winkel A gegeben;

2) Nach dem V. Zusatze des §. 113. ist

$$\text{Tang. C} = \text{c} \cdot \text{Sin. A} : \left(\text{b} - \frac{\text{c} \cdot \text{Cosin. A}}{\text{r}}\right),$$

woraus man in Folge der dem §. 113. beigefügten ersten Anmerkung den Winkel C berechnen kann;

3) Aus dem gefundenen Winkel C und dem gegebenen Winkel A findet man den Winkel B, welcher $= 180^0 - (\text{A} + \text{C})$ (I. §. 43. Zus. I.);

4) Aus den bekannten drei Winkeln und den beiden Seiten b und c kann man nach §. 112. die dritte Seite a finden; es verhält sich

$$\text{b} : \text{a} = \text{Sin. B} : \text{Sin. A},$$

und $\text{c} : \text{a} = \text{Sin. C} : \text{Sin. A}$,

daher $\text{a} = \dfrac{\text{b} \cdot \text{Sin. A}}{\text{Sin. B}}$,

und $\text{a} = \dfrac{\text{c} \cdot \text{Sin. A}}{\text{Sin. C}}$;

5) Will man aus den Seiten b und c und dem eingeschlossenen Winkel A unmittelbar die dritte Seite a berechnen, so ist nach dem II. Zusatze des §. 115.

$$\text{a} = \sqrt{\left(\text{b}^2 + \text{c}^2 - \frac{2\,\text{bc} \cdot \text{Cosin. A}}{\text{r}}\right)}.$$

6) Aus den beiden gegebenen Seiten b und c und dem eingeschlossenen Winkel A findet man endlich nach der im IV. Zusatze des §. 113. aufgestellten Formel den Flächeninhalt des Dreieckes, nach welcher

$$\triangle = \tfrac{1}{2}\text{b} \cdot \frac{\text{c} \cdot \text{Sin. A}}{\text{r}} = \frac{\tfrac{1}{2}\text{b} \cdot \text{c} \cdot \text{Sin. A}}{\text{r}}.$$

II. Auflösung:

1) Es seien (*Fig.* 38.) im Dreiecke ABC die Seiten AC und AB, oder b und c nebst dem eingeschlossenen Winkel A gegeben, und man drücke die halbe Summe der beiden übrigen Winkel B und C, welche

den gegebenen Seiten b und c gegenüberstehen, durch m, und ihre halbe Differenz durch n aus, so daß,

$$\tfrac{1}{2}(B + C) = m = \tfrac{1}{2}(180^\circ - A),$$

und $\tfrac{1}{2}(B - C) = n$, wenn nämlich $B > C$;

2) Durch den Winkel A dieses Dreieckes, das durch die gegebenen Stücke bestimmt ist (I. §. 20. Zus.), ist die Summe der Winkel B und C, oder B + C bekannt, und deßhalb auch ihre halbe Summe oder m, da $B + C = 180^\circ - A$ (I. §. 43. Zus. I.), und $\tfrac{1}{2}(B + C) = \tfrac{1}{2}(180^\circ - A) = m$;

3) Nach dem im §. 114. aufgestellten Lehrsatze verhält sich

$$b + c : b - c = \text{Tang.}\ \frac{B + C}{2} : \text{Tang.}\ \frac{B - C}{2}.$$

Setzt man nun, da B der größere und C der kleinere dieser beiden Winkel ist, m anstatt $\frac{B + C}{2} = \tfrac{1}{2}(B + C)$, und n anstatt $\frac{B - C}{2} = \tfrac{1}{2}(B - C)$, so verhält sich

$$b + c : b - c = \text{Tang. } m : \text{Tang. } n;$$

4) In dieser Proportion bestimme man das vierte Glied; es ist (Arithm. IV. §. 36.)

$$\text{Tang. } n = \frac{\text{Tang. } m \times (b - c)}{b + c}.$$

Auf diese Weise findet man die Tangens von n, das ist, von der halben Differenz der opponirten Winkel B + C, und dadurch sind die Winkel B und C bekannt, indem (§. 114. Zus. I.)

$$B = \tfrac{1}{2}(B + C) + \tfrac{1}{2}(B - C) = m + n,$$

und $C = \tfrac{1}{2}(B + C) - \tfrac{1}{2}(B - C) = m - n.$

5) Aus den Winkeln B und C und den drei anfangs gegebenen Stücken kann man, wie vorhin, nach dem Lehrsatze des §. 112. die dritte Seite BC oder a berechnen; es verhält sich nämlich

$$a : b = \text{Sin. } A : \text{Sin. } B,$$

und $a : c = \text{Sin. } A : \text{Sin. } C,$

$$\text{also } a = \frac{b \,.\, \text{Sin. A}}{\text{Sin. B}},$$

$$\text{und } a = \frac{c \,.\, \text{Sin. A}}{\text{Sin. C}}.$$

6) Will man wieder die dritte Seite a aus den gegebenen zwei Seiten b und c und dem eingeschlossenen Winkel A unmittelbar bestimmen, so ist nach dem II. Zusatze des §. 115.

$$a = \sqrt{\left(b^2 + c^2 - \frac{2bc \,.\, \text{Cosin. A}}{r}\right)}.$$

7) Endlich findet man wieder aus den gegebenen Stücken b, c und A nach der im IV. Zusatze des §. 113. angeführten Formel den Flächeninhalt des Dreieckes, nach welcher

$$\Delta = \tfrac{1}{2} b \times \frac{c \,.\, \text{Sin. A}}{r} = \frac{\tfrac{1}{2} bc \,.\, \text{Sin. A}}{r}.$$

Anmerkung: 1) Will man nach der bei Nro. 6. aufgestellten Formel aus den gegebenen Stücken b, c und A die dritte Seite A unmittelbar finden, so muß man, weil man bei Summen und Differenzen die Logarithmen nicht anwenden kann, sowohl b^2 und c^2, als auch $\frac{2bc \,.\, \text{Cosin. A}}{r}$ in den natürlichen Zahlen ausdrücken, damit man die letzte Zahl von der Summe jener zwei Zahlen abziehen, und dann aus dem Reste die Quadratwurzel ausziehen kann, da nach dieser Formel

$$a = \sqrt{\left(b^2 + c^2 - \frac{2bc \,.\, \text{Cosin. A}}{r}\right)}.$$

Indeß kann man aber bei dieser und bei ähnlichen Formeln die einzelnen Theile schon durch Logarithmen bestimmen, wenn man nur zum Behufe der Addition und Subtraktion wieder die Werthe in natürlichen Zahlen angibt.

2) Wollte man aus den gegebenen Stücken b, c und A unmittelbar den Winkel C, und dann aus A und C den Winkel B bestimmen, so müßte man die im V. Zusatze des §. 113. aufgestellte Formel mit Berücksichtigung des in der beigefügten ersten Anmerkung Gesagten benützen; nach derselben ist

$$\text{Tang. C} = c \,.\, \text{Sin. A} : \left(b - \frac{c \,.\, \text{Cosin. A}}{r}\right).$$

§. 122.

IV. Aufgabe, aus den drei Seiten die drei Winkel eines Dreieckes und den Flächeninhalt desselben zu bestimmen.

I. Auflösung:

1) Es seien (Fig. 36. und 37.) im Dreiecke ABC die drei Seiten AB, BC und AC, oder c, a und b gegeben;

2) Nach dem im §. 116. aufgestellten Lehrsatze und I. Zusatze ist

$$\text{Cosin. } A = \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}\right) \times r,$$

dann $$\text{Cosin. } B = \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,ac}\right) \times r,$$

und $$\text{Cosin. } C = \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,ab}\right) \times r;$$

3) Hat man auf diese Weise die Winkel bestimmt, so berechne man aus einem Winkel und den beiden einschließenden Seiten, etwa aus A und aus b und c, den Flächeninhalt des Dreieckes; es ist (§. 113. Zus. IV.)

$$\Delta = \tfrac{1}{2} b \times \frac{c \,.\, \text{Sin. } A}{r} = \frac{\tfrac{1}{2} bc \,.\, \text{Sin. } A}{r}.$$

II. Auflösung:

1) Es seien in diesem Dreiecke (Fig. 36. und 37.) wieder die drei Seiten a, b und c gegeben, und p habe die im I. Zusatze des §. 117. angegebene Bedeutung, es sei nämlich

$$p = \sqrt{[(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)]};$$

2) Nach dem im §. 117. aufgestellten Lehrsatze und dem beigefügten I. und II. Zusatze ist

$$\text{Sin. } A = \frac{p \,.\, r}{2\,bc},$$

dann $$\text{Sin. } B = \frac{p \,.\, r}{2\,ac},$$

und $$\text{Sin. } C = \frac{p \,.\, r}{2\,ab}.$$

3) Nach dem III. Zusatze des nämlichen §. 117. ist der Flächeninhalt des Dreieckes, mithin

$$\Delta = \frac{1}{4} p = \frac{p}{4}.$$

III. Auflösung:

1) Es seien (Fig. 39.) im Dreiecke ABC die drei Seiten a, b und c gegeben, und man soll wieder die Winkel A, B und C nebst dem Flächeninhalte desselben bestimmen;

2) Das Stück AD, das von der größten Seite außerhalb des Kreises fällt (§. 118.), drücke man wieder durch d aus (§. 118. Zus. II.), so daß

$$d = \frac{(c + a)(c - a)}{b};$$

3) Nach dem III. Zusatze des nämlichen §. 118. ist

$$\text{Cosin. } A = \frac{\frac{1}{2}(b + d) r}{c},$$

$$\text{und Cosin. } C = \frac{\frac{1}{2}(b - d) r}{a};$$

4) Durch die Winkel A und C ist auch der Winkel B bestimmt (I. §. 43. Zus. I.); es ist nämlich $B = 180^\circ - (A + C)$;

5) Will man den Flächeninhalt des Dreieckes, wie bei der I. Auflösung, aus einem Winkel und den beiden einschließenden Seiten bestimmen, so ist (§. 113. Zus. IV.)

$$\Delta = \frac{1}{2} b \times \frac{c \,.\, \text{Sin. } A}{r} = \frac{\frac{1}{2} bc \,.\, \text{Sin. } A}{r}.$$

6) Bestimmt man aber den Flächeninhalt unmittelbar aus den drei gegebenen Seiten, so berechnet man vorhin nach dem Lehrsatze des §. 118. das Stück d, welches $= \frac{(c + a)(c - a)}{b}$, und benützt dann die im V. Zusatze dieses §. aufgestellte Formel, nach welcher

$$\Delta = \frac{1}{2} b \times \sqrt{((c + \frac{1}{2} b + \frac{1}{2} d)(c - \frac{1}{2} b - \frac{1}{2} d))}.$$

§. 123.

V. Aufgabe, den Flächeninhalt der regulären Figuren trigonometrisch zu bestimmen.

Auflösung:

1) Es sei (Fig. 34.) die Linie AC die Seite eines regulären Vieleckes von n Seiten, und BA der Radius des Kreises, welcher aus B um das Vieleck beschrieben ist;

2) Durch eine gegebene Seite und die bekannte Anzahl der Seiten oder Ecke (I. §. 12. Zus. II.), welche allgemein durch n bezeichnet wird, ist das reguläre Vieleck bestimmt (I. §. 6.), indem alle Seiten so groß sind, wie die gegebene Seite (I. §. 13. b.), und jeder Polygonswinkel $= \frac{180^\circ (n - 2)}{n}$ (I. §. 127. Zus. IV.);

3) Man bezeichne die gegebene Seite des Vieleckes, somit AC durch b, und den Zentriwinkel ABC, welcher $= \frac{360^\circ}{n}$, durch B, dessen Hälfte somit $= \frac{180^\circ}{n}$ $= \frac{1}{2}B$ (I. §. 127. Zus. III.);

4) Weil das Dreieck ABC gleichschenklicht ist (I. §. 126), so ist (I. §. 36. Zus. II.), wenn man BD auf AC perpendikulär zieht, der Winkel $p = \frac{1}{2} ABC = \frac{1}{2} B$, und die Linie DA ist $\frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} b$;

5) Nach §. 105. verhält sich

$$BD : DA = r : \text{Tang. } p,$$

oder $BD : \frac{1}{2} b = r : \text{Tang. } \frac{1}{2} B$,

weßhalb $BD = \frac{\frac{1}{2} b \,.\, r}{\text{Tang. } \frac{1}{2} B} = \frac{b \,.\, r}{2 \text{Tang. } \frac{1}{2} B}$;

6) Der Flächeninhalt des Dreieckes ABC, oder

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} AC \,.\, BD = \frac{1}{2} b \times \frac{b \,.\, r}{2 \text{Tang. } \frac{1}{2} B}$$
$$= \frac{b^2 \,.\, r}{4 \text{Tang. } \frac{1}{2} B};$$

7) Das reguläre Vieleck von n Seiten begreift n solche Dreiecke ABC in sich (I. §. 127. Zus. II.), es

ist

ist also sein Flächeninhalt dem n fachen Dreiecke ABC gleich; bezeichnet man denselben durch S, so ist

$$S = \frac{b^2 . r}{4 \text{Tang.} \frac{1}{2} B} \times n = \frac{nb^2 r}{4 \text{Tang.} \frac{1}{2} B}.$$

Auf diese Weise ist durch die bekannte Zahl n, welche die Anzahl der Seiten angibt, und eine Seite b, und durch den Zentriwinkel B, dessen Hälfte nach Nro. 3. der nte Theil von 180 Grad ist, der Flächeninhalt eines jeden regulären Vieleckes bestimmt.

I. Zusatz: Wenn die Anzahl der Seiten, und der Flächeninhalt eines regulären Vieleckes bekannt ist, so kann man daraus die Seite, und aus dieser den Perimeter oder Umfang (I. §. 12. d.) berechnen.

Denn nach der eben angeführten Auflösung ist

$$S = \frac{nb^2 r}{4 \text{Tang.} \frac{1}{2} B}, \text{ also (Arithm. IV. §. 20.)}$$

$$b = \sqrt{\left(\frac{4 S . \text{Tang.} \frac{1}{2} B}{nr}\right)},$$

und der Perimeter, welcher n solche Seiten hat, ist = nb, oder

$$\text{Perim.} = n \sqrt{\left(\frac{4 S . \text{Tang.} \frac{1}{2} B}{nr}\right)}.$$

II. Zusatz: Bezeichnet man (*Fig.* 34.) den Halbmesser des Kreises BA mit a, so kann man aus der Anzahl der Seiten n des regulären Vieleckes, und aus der Seite b den Halbmesser a, und aus a und n die Seite b, und daraus den Perimeter bestimmen.

Denn es verhält sich (§. 104.)

$$BA : AD = r : \text{Sin. } p,$$

oder $a : \frac{1}{2} b = r : \text{Sin.} \frac{1}{2} B$,

$$\text{mithin } a = \frac{\frac{1}{2} b . r}{\text{Sin.} \frac{1}{2} B} = \frac{b . r}{2 . \text{Sin.} \frac{1}{2} B},$$

$$\text{und } b = \frac{2a . \text{Sin.} \frac{1}{2} B}{r} \text{ (Arithm. III. §. 98.).}$$

Wird auf diese Weise die Seite b bekannt, so kann man daraus auch wieder den Perimeter oder Umfang

des regulären Vieleckes bestimmen; indem Perim. = $b \times n = nb$, also Perim. $= \frac{2an \,.\, \text{Sin.} \, \frac{1}{2}B}{r}$.

III. Zusatz: Will man den Flächeninhalt eines regulären Vieleckes von n Seiten (*Fig.* 34.) aus dem Halbmesser BA oder a, und aus dem Zentriwinkel berechnen, welcher der nte Theil von 360° oder $= \frac{360^o}{n}$ so ist der Flächeninhalt oder

$$S = \frac{n \,.\, a^2 \,.\, \text{Sin.}\, B}{2r} = \frac{\frac{1}{2} n \,.\, a^2 \,.\, \text{Sin.}\, B}{r}.$$

Denn nach der vorstehenden Auflösung dieser V. Aufgabe, und nach dem beigefügten II. Zusatze ist

$$S = \frac{nb^2r}{4 \,\text{Tang.}\, \frac{1}{2}B}, \text{ und } b = \frac{2a \,.\, \text{Sin.}\, \frac{1}{2}B}{r},$$

$$\text{also } b^2 = \frac{4a^2 \,.\, (\text{Sin.}\, \frac{1}{2}B)^2}{r^2} = \frac{4a^2 \,.\, \text{Sin.}\, \frac{1}{2}B^2}{r^2}.$$

Setzt man nun anstatt b^2 den gleichen Werth, so ist

$$S = \frac{nr}{4 \,\text{Tang.}\, \frac{1}{2}B} \times \frac{4a^2 \,.\, \text{Sin.}\, \frac{1}{2}B^2}{r^2}$$

$$= \frac{a^2n \,.\, \text{Sin.}\, \frac{1}{2}B^2}{r \,.\, \text{Tang.}\, \frac{1}{2}B} = \frac{a^2n \,.\, \text{Sin.}\, \frac{1}{2}B^2}{r} : \text{Tang.}\, \frac{1}{2}B$$

$$= \frac{a^2n \,.\, \text{Sin.}\, \frac{1}{2}B^2}{r} : \frac{r \,.\, \text{Sin.}\, \frac{1}{2}B}{\text{Cosin.}\, \frac{1}{2}B} \quad (\S.\ 76.)$$

$$= \frac{na^2 \,.\, \text{Cosin.}\, \frac{1}{2}B \,.\, \text{Sin.}\, \frac{1}{2}B^2}{r^2 \,.\, \text{Sin.}\, \frac{1}{2}B}$$

$$= \frac{na^2 \,.\, \text{Sin.}\, \frac{1}{2}B \,.\, \text{Cosin.}\, \frac{1}{2}B}{r^2}.$$

Nun ist nach dem I. Zusatze des §. 82. und der beigefügten ersten Anmerkung

$$\frac{2\,\text{Sin.}\, a \times \text{Cosin.}\, a}{r} = \text{Sin.}\, 2a,$$

und deßhalb

$$\text{Sin.}\, a \,.\, \text{Cosin.}\, a = \tfrac{1}{2} r \,.\, \text{Sin.}\, 2a.$$

Setzt man $a = \frac{1}{2}B$, somit $2a = B$, so ist

$$\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}B \,.\, \text{Cosin.}\, \tfrac{1}{2}B = \tfrac{1}{2} r \,.\, \text{Sin.}\, B,$$

und deßhalb

$$S = \frac{na^2 \cdot \frac{1}{2} r \cdot \text{Sin. } B}{r^2} = \frac{na^2 \cdot \text{Sin. } B}{2r}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} na^2 \cdot \text{Sin. } B}{r}.$$

IV. Zusatz: Wendet man vorstehende Formeln auf eine bestimmte reguläre Figur, etwa auf das reguläre Viereck oder das Quadrat an, um den Flächeninhalt zu bestimmen, und drückt man, wie vorhin, dessen Seite durch b, und den Halbmesser des um das Quadrat beschriebenen Kreises durch a aus, so ist nach der allgemeinen Formel dessen Flächeninhalt, oder

$$S = \frac{nb^2 \cdot r}{4 \text{Tang. } \frac{1}{2} B}, \text{ und } S = \frac{\frac{1}{2} na^2 \cdot \text{Sin. } B}{r}.$$

Beim regulären Vierecke ist der Zentriwinkel $B = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$, und $\frac{1}{2} B = 45^\circ$; nun ist $n = 4$, dann $\text{Sin. } B = \text{Sin. } 90^\circ = r$ (§. 66. a.), und $\text{Tang. } \frac{1}{2} B = \text{Tang. } 45^\circ$ ebenfalls $= r$ (§. 75. Zus. II.), daher ist

$$S = \frac{4 \cdot b^2 \cdot r}{4 \cdot r} = b^2,$$

$$\text{und } S = \frac{\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot a^2 \cdot r}{r} = 2a^2.$$

Anmerkung: 1) Die nach den allgemeinen Formeln für die Bestimmung des Flächeninhaltes des Quadrates gefundenen Resultate sind die nämlichen, welche nach den Lehrsätzen der allgemeinen Planimetrie früherhin im ersten Theile dieses Lehrbuches gefunden wurden. Es ist nämlich, wenn die Seite b des Quadrates bekannt ist, dessen Flächeninhalt dem Quadrate dieser Seite gleich (I. §. 153. Zus. V.), oder $S = b^2$. Ist ferner (Fig. 34.) der Zentriwinkel ABC oder B ein rechter Winkel, wie es beim regulären Vierecke der Fall ist, so ist $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (I. §. 97.), und deßhalb, da $AB = BC$ (I. §. 126.), und $AB^2 = BC^2$, ist auch $AC^2 = AB^2 + AB^2 = 2 AB^2$; nun wird aber AB durch a, somit AB^2 durch a^2 ausgedrückt, und AC^2 gibt als das Quadrat der Seite den Flächeninhalt des regulären Viereckes, folglich ist auch derselbe oder $S = 2a^2$.

Deutlicher sieht man dieses ein, wenn man das reguläre Viereck wirklich zeichnet, und um dasselbe einen Kreis beschreibt (I. §. 127.), wie dieses im I. Theile dieses Lehrbuches in der VII. Tabelle bei der Figur 98. der Fall ist.

2) Wenn man aus einer Seite des regulären Vieleckes von n Seiten und dem bekannten Zentriwinkel B, der allemal der nte Theil von 360 Grad ist, den Flächeninhalt des Dreieckes ABC bestimmt (Fig. 34.), so ist derselbe, weil das Dreieck wegen der gleichen Radien AB und BC immer gleichschenklicht, und die Tangens von A die Kotangens von $\frac{1}{2}$B ist (§. 111. Anmerk. 2.), auch $= \frac{1}{4}\, b^2 \,.\, \frac{\text{Tang. A}}{r}$, oder

$$\triangle\, ABC = \tfrac{1}{4}\, b^2 \times \frac{\text{Cotang. } \frac{1}{2} B}{r},$$

und n solche Dreiecke, somit das reguläre Vieleck, oder

$$\text{Polyg.} = n \,.\, \tfrac{1}{4} b^2 \times \frac{\text{Cotang. } \frac{1}{2} B}{r}.$$

3) Wendet man diese Formel, welche ebenfalls aus der bekannten Seite b und der Seiten-Anzahl n, somit auch aus dem bekannten Winkel $\frac{1}{2}$ B den Flächeninhalt regulärer Figuren angibt, auf das reguläre Viereck an, so ist, weil der Winkel $B = \frac{1}{4} \,.\, 360^\circ = 90^\circ$, also $\frac{1}{2} B = 45^\circ$, und $\text{Tang. } 45^\circ = \text{Cotang. } 45^\circ = r$ (§. 75. Zus. II.), dessen Flächeninhalt, oder

$$S = n \,.\, \tfrac{1}{4} b^2 \times \frac{\text{Cotang. } \frac{1}{2} B}{r}$$

$$= 4 \times \tfrac{1}{4} b^2 \times \frac{r}{r}, \text{ somit wieder}$$

$$= b^2 \text{ (Arithm. III. §. 66. d.).}$$

4) Diese letztere Formel erhält man auch, wenn man das reguläre Vieleck als ein Dreieck betrachtet, das den Perimeter desselben zur Basis, und die Entfernung einer Seite vom Mittelpunkte zur Höhe hat (I. §. 151.), und nach der Formel $\triangle = \frac{1}{2} B \,.\, A$ den Flächeninhalt desselben bestimmt. Es ist dann das reguläre Vieleck (Fig. 34.), oder

$$S = \frac{\text{Perim.} \times BD}{2};$$

nun ist $\text{Perim.} = b \times n = n \,.\, b$, und nach §. 105. verhält sich

$$AD : BD = r : \text{Tang. A},$$

$$\text{oder } \tfrac{1}{2} b : BD = r : \text{Cotang. } \tfrac{1}{2} B,$$

also $BD = \frac{1}{2} b . \frac{\text{Cotang.} \frac{1}{2} B}{r}$,

und $S = \frac{n . b}{2} \times \frac{1}{2} b . \frac{\text{Cotang.} \frac{1}{2} B}{r}$

$= \frac{1}{4} nb^2 \times \frac{\text{Cotang.} \frac{1}{2} B}{r}$

$= n . (\frac{1}{2} b)^2 \times \frac{\text{Cotang.} \frac{1}{2} B}{r}$.

5) Ist (Fig. 34.) beim regulären Vielecke die Seite AC oder b und die Entfernung dieser Seite vom Mittelpunkte B, somit DB bekannt, und drückt man diese Entfernung durch d aus, so ist (I. §. 156. Zus. I.)

$\triangle ABC = \frac{1}{2} AC . BD = \frac{1}{2} b . d$,

und deßhalb das reguläre Vieleck

$S = n \times \triangle ABC = n \times \frac{1}{2} b . d = \frac{1}{2} n . b . d$.

6) Der Halbmesser BA des um das reguläre Vieleck beschriebenen Kreises (Fig. 34.) ist von dem Radius desjenigen Kreises wohl zu unterscheiden, welcher in den Tabellen den berechneten trigonometrischen Linien zum Grunde liegt, und bei welchem der Logarithmus seines Radius gleich 10 ist.

III.

Beispiele zur Uebung in der Auflösung der Dreiecke überhaupt.

§. 124.

I. Beispiel:

Es sei (Fig. 35.) im Dreiecke ABC die Seite AC oder b = 218 Schuh, dann der anliegende Winkel A = 48° 24′ und der opponirte Winkel B = 64° 48′; und man soll daraus den dritten Winkel C, und die beiden übrigen Seiten BC und AB oder a und c sammt dem Flächeninhalte berechnen.

Auflösung:

1) Durch die Winkel A und B ist auch der Winkel C bestimmt (I. §. 43. Zus. I.); es ist C = 180° — (A + B) = 180° — 113° 12′ = 66° 48′;

2) Aus der bekannten Seite b und den Winkeln

berechne man die übrigen zwei Seiten a und c; es ist nach §. 119. Nro. 3.

$$a = \frac{b \,.\, \text{Sin.}\, A}{\text{Sin.}\, B}, \text{ und } c = \frac{b \,.\, \text{Sin.}\, C}{\text{Sin.}\, B},$$

also Log. a = Log. b + Log. Sin. A — Log. Sin. B
= Log. b + Log. Sin. A + Compl. dec. Log. Sin. B,
und Log. c = Log. b + Log. Sin. C — Log. Sin. B
= Log. b + Log. Sin. C + Compl. dec. Log. Sin. B
(Arithm. III. §. 52. und IV. §. 77. Auflös. II.).

Nun ist, weil b = 218 Sch., dann A = 48° 24′, ferner B = 64° 48′, und C = 180° — (A + B) = 66° 48′,

Log. b	= 2,3384565,
Log. Sin. A	= 9,8737844,
Compl. dec. Log. Sin. B	= 0,0434344 — 10,

also Log. a = Log. $\left(\frac{b \,.\, \text{Sin.}\, A}{\text{Sin.}\, B}\right)$ = 12,2556753 — 10, = 2,2556753 = Log. 180,167, das ist, die Seite BC oder a beträgt 180,167 Schuh, somit beinahe 180 Sch. 2 Zoll.

Ferner ist

Log. b.	= 2,3384565,
Log. Sin. C	= 9,9633795,
Compl. dec. Log. Sin. B	= 0,0434344 — 10,

also Log. c = Log. $\left(\frac{b \,.\, \text{Sin.}\, C}{\text{Sin.}\, B}\right)$ = 12,3452704 — 10 = 2,3452704 = Log. 221,446, das ist, die Seite AB oder c beträgt 221,446 Sch., somit beinahe 221 Sch. 4 Zoll 5 Linien.

3) Aus den Seiten b und c und dem Winkel A berechne man den Flächeninhalt des Dreieckes; es ist nach §. 119. Nro. 4.

$$\triangle = \frac{\frac{1}{2} bc \,.\, \text{Sin.}\, A}{r} = \tfrac{1}{2} bc \times \frac{\text{Sin.}\, A}{r},$$

mithin Log. $\triangle$ = Log. ½ b + Log. c + Log. $\left(\frac{\text{Sin.}\, A}{r}\right)$.

Nun ist, weil b = 218 Sch., dann A = 48° 24′, und c = 221,446 Sch.,

$$\text{Log. } \tfrac{1}{2}b = 2{,}0374265,$$
$$\text{Log. } c = 2{,}3452704,$$
$$\text{Log. } \left(\frac{\text{Sin. } A}{r}\right) = 9{,}8737844 - 10,$$

also Log. $\triangle = 14{,}2564813 - 10$,
$= 4{,}2564813 =$ Log. 18050,2. das ist, der Flächeninhalt dieses Dreieckes beträgt beinahe 18050,2 □ Schuh.

4) Will man den Flächeninhalt des Dreieckes unmittelbar aus den gegebenen Stücken b, A und B berechnen, so benützt man (§. 119. Nro. 5.) die Formel

$$\triangle = \frac{b^2 \,.\, \text{Sin. } A \,.\, \text{Sin. } (A + B)}{2r \,.\, \text{Sin. } B}.$$

Hier ist, weil $b = 218$ Sch., dann $A = 48^\circ\, 24'$ und $B = 64^\circ\, 48'$, also $A + B = 113^\circ\, 12'$, und Sin. $(A + B) =$ Sin. $(180^\circ - 113^\circ\, 12') =$ Sin. $66^\circ\, 48'$ (§. 64. d. und §. 65.),

$$\text{Log. } b = 2{,}3384565$$
$$\times\, 2$$

also Log. $b^2 =$ Log. $b \times 2 = 4{,}6769130$,
$$\text{Log. Sin. } A = 9{,}8737844,$$
$$\text{Log. Sin. } (A + B) = 9{,}9633795,$$

also der Logar. des Zählers $= 24{,}5140769$;
ferner ist
$$\text{Log. } r = 10,$$
$$\text{Log. } 2 = 0{,}3010300,$$
$$\text{Log. Sin. } B = 9{,}9565656,$$

also der Logar. des Nenners $= 20{,}2575956$;
deßhalb ist nun Log. $(b^2 \,.\, \text{Sin. } A.\ \text{Sin. } (A + B))$
$= 24{,}5140769$,
und Log. $(2r \,.\, \text{Sin. } B) = 20{,}2575956$,

folglich Log. $\triangle = 4{,}2564813$
$= 18050{,}2$, und der Flächeninhalt des Dreieckes beträgt, wie vorhin, beinahe 18050,2 □ Fuß.

Anmerkung: 1) Bei der vorstehenden Auflösung sieht man, daß die Berechnung des Flächeninhaltes aus den Seiten b und c und dem Winkel A nach der bei Nro. 3. angeführten Formel bequemer ist, als nach der bei Nro. 4. vorkommenden Formel, bei welcher derselbe gleich un-

mittelbar durch die gegebenen Stücke b, A und B bestimmt ist.

2) Wenn nebst einer Seite b anstatt eines anliegenden Winkels A und eines opponirten Winkels B die beiden anliegenden Winkel A und C gegeben sind, so berechnet man zuerst den opponirten B, welcher = 180° — (A + C), und verfährt dann auf die nämliche Weise, um die übrigen unbekannten Stücke zu finden.

In diesem Falle benützt man die im Zusatze des §. 119. aufgestellte Formel, nach welcher

$$\triangle = \frac{b^2 . \text{Sin. } A . \text{Sin. } C}{2r . \text{Sin. } (A + C)}.$$

Weil aber C + (A + B) = 180 Grad (I. §. 43.), und deßhalb Sin. (A + B) = Sin. C (§. 64. d. und §. 65.), so erhält man bei der wirklichen Berechnung die nämlichen Zahlen, wie bei der vorstehenden, bei Nro. 4. vorkommenden Bestimmung des Flächeninhaltes, wo die gegebenen Stücke b = 218 Sch., dann A = 48° 24′ und B = 64° 48′ und die Formel benützt wurde

$$\triangle = \frac{b^2 . \text{Sin. } A . \text{Sin. } (A + B)}{2r . \text{Sin. } B}.$$

3) Bei der Formel $\triangle = \frac{1}{2} bc \times \frac{\text{Sin. } A}{r}$ läßt sich der Logarithmus des Flächeninhaltes bequem durch Log. $\frac{1}{2} b$ + Log. c + Log. $\left(\frac{\text{Sin. } A}{r}\right)$ ausdrücken, indem der Logarithmus des Faktors $\frac{\text{Sin. } A}{r}$ = Log. Sin. A — Log. r = Log. Sin. A — 10, und hier die Subtraktion des Logarithmus des Radius einfacher anfangs blos angezeigt wird (Arithm. IV. §. 67.).

§. 125.

II. Beispiel:

Es sei in einem Dreiecke ABC die Seite AC oder b = 187 Schuh, dann die Seite AB oder c = 102 Schuh, und der der Seite AC gegenüberstehende Winkel B sei = 114 Grad; man soll daraus die beiden übrigen Winkel C und A, und die dritte Seite nebst dem Flächeninhalte berechnen.

Auflösung:

1) Weil in diesem Beispiele die Seite b größer ist als c, so ist auch der Winkel B größer als C, der in diesem bestimmten Dreiecke spitzig ist (§. 120. Nro. 3.);

2) Man suche aus den gegebenen Stücken b, c und B den Winkel C; nach §. 120. Nro. 2. ist

$$\text{Sin. C} = \frac{\text{c . Sin. B}}{\text{b}}, \text{ mithin}$$

$$\text{Log. Sin. C} = \text{Log. c} + \text{Log. Sin. B} - \text{Log. b}$$
$$= \text{Log. c} + \text{Log. Sin. B} + \text{Compl. dec. Log. b};$$

3) Nun ist, da b = 187 Sch., dann c = 102 Sch., ferner B = 114°, und Sin. B = Sin. 114° = Sin. 66 Grad (§. 65.)

$$\text{Log. c} = 2{,}0086002,$$
$$\text{Log. Sin. B} = 9{,}9607302,$$
$$\text{Compl. dec. Log. b} = 7{,}7281584 - 10,$$

also Log. Sin. C = 19,6974888 — 10 = 9,6974888 = 29° 53′ 15″, das ist, der Winkel C hat beinahe 29° 53′ 15″;

4) Durch den Winkel B und den so eben gefundenen Winkel C ist der Winkel A bestimmt, welcher = 180° — (B + C), also = 180° — 143° 53′ 15″ = 36° 6′ 45″;

5) Die dritte Seite a berechne man aus der Seite b, und den Winkeln A und B, oder aus der Seite c und den Winkeln A und C, indem (§. 120. Nro. 5.)

$$\text{a} = \frac{\text{b . Sin. A}}{\text{Sin. B}}, \text{ und a} = \frac{\text{c . Sin. A}}{\text{Sin. C}},$$

also Log. a = Log. b + Log. Sin. A + Compl. dec. Log. Sin. B, und Log. a = Log. c + Log. Sin. A + Compl. dec. Log. Sin. C;

nun ist, weil b = 187′, c = 102′, A = 36° 6′ 45″, und C = 29° 53′ 15″,

Log. b = 2,2718416,	Log. c = 2,0086002,
Log. Sin. A = 9,7703900,	Log. Sin. A = 9,7703900,
Compl. ꝛc. B = 0,0392698—10,	Compl. ꝛc. C = 0,3025104—10,
also Log. a = 12,0815014—10 = 2,0815014 = Log. 120,64;	also Log. a = 12,0815006 — 10 = 2,0815006 = Log. 120,64.

Die Seite a beträgt demnach 120,64 Fuß, somit beinahe 120 Schuh 6 Zoll 4 Linien, oder, wenn man die Linien nicht mehr angibt, 120 Schuh 6 Zoll.

6) Aus den Seiten b und c und dem eingeschlossenen Winkel A berechne man den Flächeninhalt des Dreieckes; es ist (§. 120. Nro. 6.),

$$\triangle = \frac{\frac{1}{2}b \,.\, c \,.\, \text{Sin. } A}{r} = \tfrac{1}{2}b \,.\, c \times \frac{\text{Sin. } A}{r},$$

also $\text{Log. } \triangle = \text{Log. } \tfrac{1}{2}b + \text{Log. } c + \text{Log. } \left(\frac{\text{Sin. } A}{r}\right)$.

Nun ist, weil $b = 187$ Sch., mithin $\frac{1}{2}b = 93{,}5$ Sch., dann $c = 102$ Sch., und $A = 36^\circ\, 6'\, 45''$,

$$\text{Log. } \tfrac{1}{2}b = 1{,}9708116,$$
$$\text{Log. } c = 2{,}0086002,$$
$$\text{Log. } \left(\frac{\text{Sin. } A}{r}\right) = 9{,}7703900 - 10,$$

also $\text{Log. } \triangle = 13{,}7498018 - 10$
$= 3{,}7498018 = 5621.$

Es beträgt demnach der Flächeninhalt dieses Dreieckes beinahe 5621 □ Fuß.

Anmerkung: 1) Es wurden hier wieder die gesuchten Winkel bis auf Sekunden angegeben, damit darnach die dritte Seite und der Flächeninhalt des Dreieckes genauer bestimmt werden konnte.

2) Wollte man den Flächeninhalt des Dreieckes aus den Seiten b und c und den Winkeln B und C nach der im §. 120. Nro. 7. aufgestellten Formel berechnen, so müßte man, weil in diesem Beispiele $B + C > 90^\circ$, und das Supplement zu dieser Summe $= 180^\circ - (B + C) = A$, doch wieder den Logarithmus des Sinus von $A = 36^\circ\, 6'\, 45''$ nach den Tabellen bestimmen, da nach jener Formel $\triangle = \frac{\frac{1}{2}bc \,.\, \text{Sin. } (B + C)}{r}$.

3) Daß im Dreiecke durch zwei Seiten und den Winkel, der der kleineren dieser Seiten gegenüber ist, die übrigen Stücke nicht bestimmt sind, und das Dreieck unbestimmt ist, wurde im §. 120. Nro. 3. schon bemerkt. Ausführlich wurde dieses im I. Theile dieses Lehrbuches im §. 35. nach der in der II. Tabelle vorkommenden Figur 36. nachgewiesen; es sind nämlich da die beiden

Dreiecke BEF und BEM möglich, bei welchen BE = BE, dann BF = BM, und der Winkel m, welcher der kleineren Seite BF gegenübersteht, beiden gemein ist, oder m = m, und diese beiden Dreiecke sind keineswegs kongruent, da in dem einen der Seite *BE* der stumpfe Winkel p, und im anderen Dreiecke eben dieser Seite der spitzige Winkel x gegenübersteht.

Weil die beiden Winkel p + x = 180 Grad (I. §. 35. Zus. II.), so ist x das Supplement zu p, und Sin. p = Sin. x (§. 65.); deßwegen kann man in diesem Falle aus den gegebenen Stücken allein nicht ermessen, ob zum gefundenen Logarithmus Sinus des Winkels, der der Seite *BE* opponirt ist, der spitzige Winkel der Tabelle oder sein stumpfer Nebenwinkel zur Konstruktion des Dreieckes BEM oder des Dreieckes BEF zu nehmen ist, und man nur zum voraus weiß, daß der Winkel m, der der kleineren Seite gegenüber steht, kleiner ist, als der andere Winkel, der der größeren Seite opponirt ist (I. §. 30.).

§. 126.

III. Beispiel:

Wenn in einem Dreiecke von zwei gegebenen Seiten die eine 336 Schuh, und die andere 224 Schuh, und der von ihnen eingeschlossene Winkel 136 Grad hält; wie groß sind die beiden übrigen Winkel, und wie groß ist die dritte Seite und der Flächeninhalt dieses Dreieckes?

I. Auflösung:

1) Man bezeichne die gegebene größere Seite durch b, die kleinere durch c, und den eingeschlossenen Winkel mit A, so daß b = 336 Schuh, dann c = 224 Sch., und A = 136 Grad;

2) Aus den gegebenen Stücken berechne man zuerst den Winkel C, der der kleineren bekannten Seite c opponirt ist; nach dem V. Zusatze des §. 113. ist

$$\text{Tang. C} = \text{c . Sin. A} : \left(\text{b} - \frac{\text{c . Cosin. A}}{\text{r}}\right);$$

3) Man bestimme zuerst die natürliche Zahl vom Subtrahend dieser Differenz; es ist, weil b = 336 Sch.,

dann $c = 224$ Schuh, und $A = 136°$, somit weil $136° + 44° = 180$ Grad, $\text{Cosin. } 136 = - \text{Sin. } 44°$, oder $\text{Sin. } 44° = - \text{Cosin. } 136$ Grad (§. 69. Zus.),

$$\text{Log. } c = 2{,}3502480,$$

$$\text{Log. } \left(\frac{\text{Cosin. } A}{r}\right) = 9{,}8569341 - 10,$$

$$\text{also Log. } \left(\frac{c \cdot \text{Cosin. } A}{r}\right) = 12{,}2071821 - 10$$

$$= 2{,}2071821 = \text{Log. } 161{,}132.$$

4) Weil der Winkel $A = 136°$ stumpf, und deßwegen sein Kosinus negativ ist (§. 71. b.), so wird die gefundene Zahl negativ, und sie muß von b abgezogen werden, wodurch sie dann als eine positive Zahl zu addiren ist (Arithm. III. §. 45. Lehrs. III.), da in diesem Beispiele

$$b - \frac{c \cdot \text{Cosin. } A}{r} = b - \left(\frac{c \times - \text{Cosin. } A}{r}\right)$$

$$= 336 - (-161{,}132) = 336 + 161{,}132 = 497{,}132;$$

5) Es ist, da $\text{Sin. } A = \text{Sin. } 136° = \text{Sin. } 44$ Grad (§. 64. d. und §. 65.)

$$\text{Tang. } C = 224 \times \text{Sin. } 136° : 497{,}132$$

$$= \frac{224 \times \text{Sin. } 44°}{497{,}132}.$$

Nun ist $\text{Log. Sin. } 224 = 2{,}3502480,$

$$\text{Log. Sin. } A = \text{Log. Sin. } 44° = 9{,}8417713,$$

$$\text{Compl. dec. Log. } 497{,}132 = 7{,}3035283 - 10,$$

$$\text{also Log. Tang. } C = 19{,}4955476 - 10$$

$$= 9{,}4955476 = \text{Log. Tang. } 17° \; 23';$$

es beträgt also der Winkel C beinahe $17° \; 23'$;

6) Aus dem gegebenen Winkel A und dem gefundenen C berechne man den Winkel B; es ist $B = 180° - (A + C) = 180° - 153° \; 23' = 26° \; 37'$;

7) Aus den gegebenen Seiten und den bekannten Winkeln könnte man jetzt nach Vorschrift des §. 119 oder 120. die dritte Seite a berechnen; diese kann man aber auch unmittelbar aus den gegebenen Seiten und

dem eingeschlossenen Winkel finden; indem (§. 115. Zus. II.)

$$a = \sqrt{\left(b^2 + c^2 - \frac{2bc \,.\, \text{Cosin. } A}{r}\right)}.$$

Nun ist $b^2 = 336^2 = 112896$, und $c^2 = 224^2 = 50176$, was man auch durch die Logarithmen finden kann (Arithm. IV. §. 78.); ferner ist

$$\text{Log. } 2b = 2{,}8273693,$$
$$\text{Log. } c = 2{,}3502480,$$
$$\text{Log.} \left(\frac{\text{Cosin. } A}{r}\right) = 9{,}8569341 - 10,$$

$$\text{also Log.} \left(\frac{2bc \,.\, \text{Cosin. } A}{r}\right) = 15{,}0345514 - 10$$
$$= 5{,}0345514 = \text{Log. } 108281.$$

Weil der Kosinus von $A = 136°$ negativ ist (§. 71.), so muß man die negative Zahl 108281 abziehen, mithin diese zu $b^2 + c^2$ addiren, das ist

$$b^2 = 112896,$$
$$c^2 = 50176,$$
$$+ 108281,$$

$$\text{also } b^2 + c^2 + 108281 = 271353.$$

Zieht man noch aus dieser Zahl die Quadratwurzel aus, entweder nach den gewöhnlichen Regeln (Arithm. III. §. 30.), oder mittels der Logarithmen (Arithm. IV. §. 79.), so findet man, daß

$$a = \sqrt{271353} = 520{,}91 \ldots,$$

weßhalb die gesuchte Seite a beinahe 521 Schuh beträgt.

8) Aus den gegebenen Seiten b und c und dem eingeschlossenen Winkel A berechne man nach dem IV. Zusatze des §. 113. den Flächeninhalt des Dreieckes; es ist

$$\Delta = \tfrac{1}{2}\, bc \times \frac{\text{Sin. } A}{r},$$

$$\text{weßhalb Log. } \Delta = \text{Log. } \tfrac{1}{2} b + \text{Log. } c + \text{Log. } \frac{\text{Sin. } A}{r}.$$

Nun ist, da $b = 336$; somit $\frac{1}{2} b = 168$ Schuh, dann $c = 224$ Schuh, und $A = 136°$, mithin Sin. A = Sin. $136°$ = Sin. 44 Grad (§. 64. d. §. 65.),

$$\text{Log. } \tfrac{1}{2} b = 2{,}2253093,$$
$$\text{Log. } c = 2{,}3502480,$$
$$\text{Log. } \left(\frac{\text{Sin. A}}{r}\right) = 9{,}8417713 - 10,$$

also $\text{Log. } \triangle = 14{,}4173286 - 10,$
$= 4{,}4173286 = \text{Log. } 26141{,}4;$
der Flächeninhalt dieses Dreieckes beträgt demnach beinahe 26141,4 □ Schuh.

II. Auflösung:

1) Man bezeichne die gegebenen zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel wieder mit den Buchstaben b, c und A, so daß b die größere Seite anzeigt, und deßwegen auch der Winkel B größer, als der Winkel C ist (I. §. 30.);

2) In diesem Beispiele ist $A = 136^\circ$, daher $B + C = 180^\circ - A = 180^\circ - 136^\circ = 44^\circ$, und $\tfrac{1}{2}(B + C) = \tfrac{1}{2}(180 - A) = \frac{44^\circ}{2} = 22^\circ$, das ist (§. 121. Auflösung II. Nro. 1.), $m = 22^\circ$, während $n = \tfrac{1}{2}(B - C)$;

3) Nach Nro. 4. des §. 121. ist bei der II. Auflösung

$$\text{Tang. } n = \frac{\text{Tang. } m \times (b - c)}{b + c},$$

und $\text{Log. Tang. } n = \text{Log. Tang. } m + \text{Log. } (b - c) - \text{Log. } (b + c)$, oder
$\text{Log. Tang. } n = \text{Log. } m + \text{Log. } (b - c) + \text{Compl. dec. Log. } (b + c)$.

Nun ist, weil $m = 22^\circ$, dann $b - c = 112$, und $b + c = 560$,

$$\text{Log. Tang. } m = 9{,}6064096,$$
$$\text{Log. } (b - c) = 2{,}0492180,$$
$$\text{Compl. dec. Log. } (b + c) = 7{,}2518120 - 10,$$

also $\text{Log. Tang. } n = 18{,}9074396 - 10$
$= 8{,}9074396 = \text{Log. Tang. } 4^\circ\ 37'\ 10''.$

Weil nun der Winkel $n = \tfrac{1}{2}(B - C) = 4^\circ\ 37'\ 10''$, und $m = \tfrac{1}{2}(B + C) = 22^\circ$, so ist (§. 114. Zus. I.)

$B = m + n = 22^\circ + 4^\circ\ 37'\ 10'' = 26^\circ\ 37'\ 10''$,
und $C = m - n = 22^\circ - 4^\circ\ 37'\ 10'' = 17^\circ\ 22'\ 50''$.

4) Weil auf diese Weise die Winkel B und C gefunden wurden, so berechne man nach §. 120. die dritte Seite a; es ist nach Nro. 5. dieses §.

$$a = \frac{b\ .\ \text{Sin. } A}{\text{Sin. } B},$$

also Log. a = Log. b + Log. Sin. A + Compl. dec. Log. Sin. B.

Nun ist, weil b = 336 Sch., dann der Winkel $B = 26^\circ\ 37'\ 10''$, und der Winkel $A = 136^\circ$, somit Sin. A = Sin. 136° = Sin. 44°,

$$\begin{aligned} \text{Log. } b &= 2{,}5263393, \\ \text{Log. Sin. } A &= 9{,}8417713, \\ \text{Compl. dec. Log. Sin. } B &= 0{,}3486614 - 10, \\ \hline \text{also Log. } a &= 12{,}7167720 - 10, \\ &= 2{,}7167720 = \text{Log. } 520{,}91; \end{aligned}$$

es hat demnach die Seite a wieder beinahe 521 Schuh.

5) Der Flächeninhalt wird bei dieser Auflösung, wie vorhin, nach der im IV. Zusatze des §. 113. aufgestellten Formel berechnet, nach welcher

$$\triangle = \tfrac{1}{2}\, bc \times \frac{\text{Sin. } A}{r}.$$

I. Zusatz: Wenn der von den beiden gegebenen Seiten eingeschlossene bekannte Winkel spitzig ist, so ist dessen Kosinus positiv (§. 71.), und es muß, wenn wieder b = 336 Schuh, und c = 224 Schuh, der Winkel A aber = 44°, die in der I. Auflösung bei Nro. 4. gefundene natürliche Zahl 161,132 von der Seite b, welche = 336, abgezogen werden. In diesem Falle ist nämlich, da $A = 44^\circ$, und c = 224 Schuh,

$$\begin{aligned} b &= 336, \\ -\frac{c\ .\ \text{Cosin. } A}{r} &= -161{,}132, \\ \hline \text{also } b - \frac{c\ .\ \text{Cosin. } A}{r} &= 174{,}868, \end{aligned}$$

und deßhalb

$$\text{Tang. } C = c \,.\, \text{Sin. } A : (b - \frac{c \,.\, \text{Cosin. } A}{r})$$

$$= \frac{224 \times \text{Sin. } 44^\circ}{174{,}868}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \text{Log. } c &= 2{,}3502480, \\ \text{Log. Sin. } A &= 9{,}8417713, \\ \text{Compl. dec. Log. } 174{,}868 &= 7{,}7572896 - 10, \end{aligned}$$

also $\text{Log. Tang. } C = 19{,}9493089 - 10$
$= 9{,}9493089 = \text{Log. Tang. } 41^\circ\ 40'$.

Der Winkel C hält demnach beinahe $41^\circ\ 40'$, und der Winkel B, welcher $= 180^\circ - (A + C)$, beträgt $94^\circ\ 20'$.

II. Zusatz: Diese nämliche Rücksicht auf das Zeichen des Kosinus muß man bei der vorstehenden zweiten Auflösung nehmen, wenn man wieder nach der im II. Zusatze des §. 115. aufgestellten Formel die dritte Seite a unmittelbar aus den Seiten b und c und dem eingeschlossenen Winkel A berechnen will; es ist nach derselben

$$a = \sqrt{(b^2 + c^2 - \frac{2bc \,.\, \text{Cosin. } A}{r})}.$$

Nun ist $b^2 = 112896$,
dann $c^2 = 50176$,

also $b^2 + c^2 = 163072$,

ferner $-\frac{2bc \,.\, \text{Cosin. } A}{r} = -108281$,

also $b^2 + c^2 - \frac{2bc \,.\, \text{Cosin. } A}{r} = 54791$.

Zieht man aus dieser Zahl die Quadratwurzel aus, so findet man, daß $a = \sqrt{54791} = 234{,}07$; es beträgt demnach die Seite, wenn man die Linien nicht mehr angibt, beinahe 234 Schuh.

Anmerkung: 1) Aus diesen Zusätzen, und der in diesem §. vorkommenden I. Auflösung sieht man hinlänglich, wie mit gehöriger Berücksichtigung des Zeichens des Kosinus (§. 82. Anmerkung 2 und 3.), aus zwei gegebenen

nen Seiten, und dem bekannten eingeschlossenen Winkel unmittelbar die übrigen Stücke zu berechnen sind.

2) Bei der angeführten II. Auflösung nach dem im §. 114. aufgestellten Lehrsatze ist auf die Zeichen der trigonometrischen Linien keine besondere Rücksicht zu nehmen, weil die halbe Summe der Winkel B und C, und ihre halbe Differenz immer im ersten Quadranten liegt, und deßhalb ihre Tangens jedesmal positiv ist (§. 78. c.); indem $B + C < 180$ Grad (I. §. 28. Zus. II.), mithin $\frac{1}{2}(B + C) < 90^\circ$, und eben so $\frac{1}{2}(B - C) < 90$ Grad.

§. 127.

IV. Beispiel:

Aus den drei gegebenen Seiten eines Dreieckes, welche 50, dann 70 und 60 Schuh betragen, die drei Winkel und den Flächeninhalt zu bestimmen.

I. Auflösung:

1) Man bezeichne die gegebene kleinste Seite mit a, die größte mit b, und die mittlere mit c, so daß $a = 50$, $b = 70$ und $c = 60$ Schuh;

2) Nach den im §. 122. bei der I. Auflösung angeführten Formeln (§. 116.) ist

$$\text{Cosin. } A = \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \times r,$$

dann $$\text{Cosin. } B = \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right) \times r,$$

und $$\text{Cosin. } C = \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) \times r;$$

3) Man setze der Kürze wegen $a^2 + b^2 + c^2 = q$, und $q - 2c^2$ anstatt $a^2 + b^2 - c^2$, da $a^2 + b^2 + c^2 - 2c^2 = a^2 + b^2 - c^2 = q - 2c^2$,

und eben so $a^2 + c^2 - b^2 = q - 2b^2$,

wie auch $b + c^2 - a^2 = q - 2a^2$.

Es ist

$a = 50$	$a^2 = 2500$	$2a^2 = 5000$,
$b = 70$	$b^2 = 4900$	$2b^2 = 9800$,
$c = 60$	$c^2 = 3600$	$2c^2 = 7200$,

also $a^2 + b^2 + c^2 = 11000 = q$, und es ist ferner $2ab = 7000$, dann $2ac = 6000$, $2bc = 8400$;

4) Setzt man bei Nro. 2. diese Werthe, so ist

$$\text{Cosin. A} = \frac{6000}{8400}\,r = \frac{10}{14}\,r,$$

dann $$\text{Cosin. B} = \frac{1200}{6000}\,r = \frac{2}{10}\,r,$$

und $$\text{Cosin. C} = \frac{3800}{7600}\,r = \frac{19}{35}\,r;$$

mithin

$\text{Log. Cosin. A} = \text{Log.}\,{}^{10}/_{14} + \text{Log. r} = 0{,}8538720 - 1 + 10 = 9{,}8538720 = \text{Log. Cosin. } 44^\circ\ 24'\ 55''$,

dann

$\text{Log. Cosin. B} = \text{Log.}\,{}^{2}/_{10} + \text{Log. r} = 9{,}3010300 = \text{Log. Cosin. } 78^\circ\ 27'\ 47''$,

und

$\text{Log. Cosin. C} = \text{Log.}\,{}^{19}/_{35} + \text{Log. r} = 9{,}7346856 = \text{Log. Cosin. } 67^\circ\ 7'\ 17''$.

Es ist demnach beinahe der Winkel

$$A = 44^\circ\ 24'\ 55'',$$
dann $$B = 78^\circ\ 27'\ 47'',$$
und $$C = 57\ \ 7'\ 17'',$$

weßhalb $A + B + C = 179^\circ\ 59'\ 59''$, das ist, die drei gefundenen Winkel A, B und C betragen wirklich zusammen beinahe 180 Grad (I. §. 43.).

5) Hat man auf diese Weise aus den gegebenen Seiten die drei Winkel mit der gehörigen Genauigkeit berechnet, so kann man aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, etwa aus b, c und A, nach der im IV. Zusatze des §. 113. aufgestellten Formel den Flächeninhalt finden, nach welcher

$$\triangle = {}^1/_2\,bc\,.\,\frac{\text{Cosin. A}}{r}.$$

Nun ist, weil $b = 70$, also ${}^1/_2\,b = 35$, dann $c = 60$, und $A = 44^\circ\ 24'\ 55''$,

$$\text{Log. } {}^1/_2 b = 1{,}5440680,$$
$$\text{Log. c} = 1{,}7781513,$$
$$\text{Log. } \frac{\text{Sin. A}}{r} = 9{,}8448891 - 10,$$

also $$\text{Log. } \triangle = 13{,}1671084 - 10 = 3{,}1671084 = 1469{,}4.$$

Es beträgt demnach der Flächeninhalt des Dreieckes beinahe 1469,4 □ Schuh.

II. Auflösung:

1) Man bezeichne die gegebenen Seiten, wie vorhin, so daß $a = 50$, dann $b = 70$, und $c = 60$ Schuh;

2) Nach dem I. und II. Zusatze des §. 117. ist, wenn
$p = \sqrt{[(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)]}$,

$$\text{Sin. } A = \frac{p \,.\, r}{2bc},$$

dann $$\text{Sin. } B = \frac{p \,.\, r}{2ac},$$

und $$\text{Sin. } C = \frac{p \,.\, r}{2ab};$$

3) Man setze der Kürze wegen $a + b + c = s$, und $s - 2c$ anstatt $a + b - c$, da $a + b + c - 2c = a + b - c = s - 2c$,

und eben so $a + c - b = s - 2b$,
wie auch $b + c - a = s - 2a$.

Es ist	$a = 50$	$2ab = 7000$	$180;$	$180;$	180
	$b = 70$	$2ac = 6000$	-100	-140	-120
	$c = 60$	$2bc = 8400$	$80,$	$40,$	$60,$

daher ist $a + b + c = s = 180$,
dann $s - 2c = 60$,
ferner $s - 2b = 40$,
und $s - 2a = 80$;

4) Setzt man nun diese Werthe, um den Werth von p zu bestimmen (§. 117. Zus. I.), so ist

$$p = \sqrt{(180 \times 80 \times 40 \times 60)} = (\text{Log. } 180 + \text{Log. } 80 + \text{Log. } 40 + \text{Log. } 60) : 2;$$

ferner ist nach Nro. 2.

$$\text{Log. Sin. } A = \text{Log. } (p \,.\, r) - \text{Log. } 2bc,$$
$$= \text{Log. } pr + \text{Compl. dec. Log. } 2bc,$$
dann $$\text{Log. Sin. } B = \text{Log. } pr + \text{Compl. dec. Log. } 2ac,$$
und $$\text{Log. Sin. } C = \text{Log. } pr + \text{Compl. dec. Log. } 2ab;$$

5) Nun ist Log. s = Log. 180 = 2,2552725,
Log. $s - 2a$ = Log. 80 = 1,9030900,
Log. $s - 2b$ = Log. 40 = 1,6020600,
und Log. $s - 2c$ = Log. 60 = 1,7781513,

= 7,5385738
: 2

es ist also Log. p = 3,7692869,

und $\text{Log. } pr = \text{Log. } p + \text{Log. } r = 13{,}7692869$; ferner ist, da $2bc = 8400$, dann $2ac = 6000$, und $2ab = 7000$,

$$\begin{aligned} \text{Log. } pr &= 13{,}7692869, \\ \text{Compl. dec. Log. } 2bc &= \underline{6{,}0757207 - 10,} \end{aligned}$$

also $\text{Log. Sin. } A = 19{,}8450076 - 10$
$= 9{,}8450076 = \text{Log. Sin. } 44^\circ\ 24'\ 55''$;

dann

$$\begin{aligned} \text{Log. } pr &= 13{,}7692869, \\ \text{Compl. dec. Log. } 2ac &= \underline{6{,}2218487 - 10,} \end{aligned}$$

also $\text{Log. Sin. } B = 19{,}9911356 - 10$
$= 9{,}9911356 = \text{Log. Sin. } 78^\circ\ 27'\ 46''$;

und

$$\begin{aligned} \text{Log. } pr &= 13{,}7692869, \\ \text{Compl. dec. Log. } 2ab &= \underline{6{,}1549020 - 10,} \end{aligned}$$

also $\text{Log. Sin. } C = 19{,}9241889 - 10$
$= 9{,}9241889 = \text{Log. Sin. } 57^\circ\ 7'\ 18''$.

Es ist demnach beinahe der Winkel

$$\begin{aligned} A &= 44^\circ\ 24'\ 55'', \\ \text{dann } B &= 78\ \ 27\ \ 46, \\ \text{und } C &= 57\ \ \ 7\ \ 18, \end{aligned}$$

weßhalb $A + B + C = 179^\circ\ 59'\ 59''$, das ist, die drei gefundenen Winkel A, B und C betragen wieder beinahe 180 Grad (I. §. 43.), woraus man zugleich erkennt, mit welcher Genauigkeit dieselben bestimmt wurden.

6) Aus dem bekannten Werthe von p läßt sich ebenfalls der Flächeninhalt des Dreieckes bestimmen; es ist nämlich (§. 117. Zus. III.)

$$\triangle = \frac{p}{4},$$

also $\text{Log. } \triangle = \text{Log. } p - \text{Log. } 4$;

$$\begin{aligned} \text{nun ist Log. } p &= 3{,}7692869, \\ \text{und Log. } 4 &= 0{,}6020600, \end{aligned}$$

also $\text{Log. } p - \text{Log. } 4 = 3{,}1672269$
$= \text{Log. } 1469{,}6$, das ist, der Flächeninhalt des Dreieckes beträgt beinahe 1469,6 □ Schuh.

III. Auflösung:

1) Man bezeichne die gegebenen Seiten wieder durch a, b und c, so daß $a = 50$, $b = 70$ und $c = 60$

Schuh, und somit a die kleinste, b die größte, und c die mittlere Seite anzeigt (Fig. 39.);

2) Nach dem im §. 118. aufgestellten Lehrsatze und dem beigefügten I. und II. Zusatze berechne man d; es ist

$$d = \frac{(c + a)(c - a)}{b};$$

nun ist $c + a = 110$, und $c - a = 10$, also

$$d = \frac{110 \cdot 10}{70} = \frac{110}{7} = 15{,}71428,$$

und daher $b + d = 85{,}71428$,
und $b - d = 54{,}28572$,
mithin $\tfrac{1}{2}(b + d) = 42{,}85714$,
und $\tfrac{1}{2}(b - d) = 27{,}14286$;

3) Nach dem III. Zusatze des §. 118. ist

$$\text{Cosin. } A = \frac{\tfrac{1}{2}(b + d)\, r}{c},$$

$$\text{und Cosin. } C = \frac{\tfrac{1}{2}(b - d)\, r}{a},$$

somit $\text{Log.Cosin.} A = \text{Log.} \tfrac{1}{2}(b + d) + \text{Log.} r - \text{Log.} c$,
und $\text{Log.Cosin.} C = \text{Log.} \tfrac{1}{2}(b - d) + \text{Log.} r - \text{Log.} a$;
nun ist $\text{Log.} \tfrac{1}{2}(b + d) + \text{Log. } r = 11{,}6320232$,
und $\text{Compl. dec. Log. } c = 8{,}2218487 - 10$,

also $\text{Log. Cosin. } A = 19{,}8538719 - 10$
$= 9{,}8538719 = \text{Log. Cosin. } 44^\circ\, 24'\, 55''$;
ferner $\text{Log.} \tfrac{1}{2}(b - d) + \text{Log.} r = 11{,}4336556$,
$\text{Compl. dec. Log. } a = 8{,}3010300 - 10$,

also $\text{Log. Cosin. } C = 19{,}7346856 - 10$
$= 9{,}7346856 = \text{Log. Cosin. } 57^\circ\, 7'\, 18''$.

Es ist demnach beinahe der Winkel
$A = 44^\circ\, 24'\, 55''$,
und $C = 57\;\; 7\;\; 18$

also $A + C = 101^\circ\, 32'\, 13''$,
und $B = 180^\circ - (101^\circ\, 32'\, 13'') = 78^\circ\, 27'\, 47''$.

3) Da auf diese Weise alle drei Winkel gefunden wurden, so berechne man noch aus den gegebenen drei Seiten den Flächeninhalt des Dreieckes; nach der im V. Zusatze des §. 117. aufgestellten Formel ist

$$\triangle = \tfrac{1}{2} b \times \sqrt{(c + \tfrac{1}{2} b + \tfrac{1}{2} d)(c - \tfrac{1}{2} b - \tfrac{1}{2} d)},$$

und $Log.\,\Delta = Log.\,\tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}(Log.\,c + \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}d)$
$+ \tfrac{1}{2}(Log.\,c - \tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{2}d)$

(Arithm. IV. §. 56. und 59.).

Nun ist $b = 70$, und $\tfrac{1}{2}b = 35$, dann
$c = 60$,
und $\tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}d = \tfrac{1}{2}(b+d) = 42{,}85714$,

also $c + \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}d = 102{,}85714$;
ferner ist $c = 60$,
und $-\tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{2}d = -(\tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}d) = -42{,}85714$,

also $c - \tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{2}d = 17{,}14286$,
mithin ist $\Delta = 35 \times \sqrt{(102{,}85714 \times 17{,}14286)}$,
und $Log.\,\Delta = Log.\,35 + \tfrac{1}{2}\,Log.\,102{,}85714$
$+ \tfrac{1}{2}\,Log.\,17{,}14286$;

$Log.\,102{,}85714 = 2{,}0122344$,
$Log.\,17{,}14286 = 1{,}2340834$,

$= 3{,}2463178$
$: 2$

$1{,}6231589$,
dann $Log.\,\tfrac{1}{2}b = Log.\,35 = 1{,}5440680$,

folglich $Log.\,\Delta = 3{,}1672269 = Log.\,1469{,}6$.

Der Flächeninhalt dieses Dreieckes beträgt demnach immerhin etwas über 1469 □ Schuh, und ist deßhalb zufolge der dreifachen Auflösung beinahe 1470 Quadratschuh gleich.

Anmerkung: 1) Um die Winkel genauer zu bestimmen, wurde bei diesen Auflösungen ihre Größe bis auf Sekunden angegeben.

2) Weil alle drei Winkel eines geradlinigten ebenen Dreieckes 180° haben (I. §. 43.), so hat man durch die I. und II. Auflösung zugleich die sogenannte Winkelprobe; indem da alle drei Winkel nach besonderen Formeln berechnet werden, und man aus der Abweichung ihrer Summe von der Summe aller Winkel eines jeden Dreieckes, welche 180 Grad beträgt, ersieht, mit welcher Genauigkeit die Winkel aus den bekannten Seiten berechnet wurden.

Ganz genau kann die Summe der gefundenen Winkel nicht 180 Grad geben, weil die Winkel durch die Logarithmen der trigonometrischen Linien bestimmt werden, und die Größe dieser letzteren durch Annäherung für den

angenommenen Halbmesser $r = 10^{10}$ angegeben ist (Arithm. IV. §. 61. Zus. IV.).

3) Nach den aufgestellten Formeln ist die unmittelbare Bestimmung der unbekannten Stücke aus den gegebenen derjenigen vorzuziehen, bei welcher vorhin aus den bekannten Stücken andere berechnet werden, um aus diesen die anfangs gesuchten Stücke zu finden.

Deßhalb ist im Beispiele dieses §. die Bestimmung des Flächeninhaltes nach der II. und III. Auflösung genauer als nach der I. Auflösung, weil bei jenen die Berechnung unmittelbar nur aus den gegebenen Seiten, bei dieser aber auch mittels eines eingeschlossenen Winkels geschah, dessen Größe nicht ganz genau angegeben werden kann.

§. 128.

Bemerkung, die im vorigen §. angegebenen Auflösungen betreffend.

Um für alle Fälle aus den gegebenen Seiten die Winkel berechnen zu können, muß man auf die Zeichen der trigonometrischen Linien, und auf andere Umstände Rücksicht nehmen, indem zwar die Sinus aller Dreieckswinkel, die nur hohl oder kleiner als 180 Grad sein können (I. §. 43.), positiv sind (§. 66.), dagegen aber der Kosinus bei spitzigen Winkeln positiv, und bei stumpfen negativ ist (§. 71.), und die Tabellen unmittelbar nur die Logarithmen der trigonometrischen Linien für die spitzigen Winkel von 0 bis 90 Grad angeben (§. 82.).

Wenn das Dreieck spitzwinklicht ist (I. §. 29.), wie es bei dem Beispiele des vorigen §. der Fall war, so ist der Sinus und der Kosinus eines jeden Winkels positiv, und die trigonometrischen Tabellen geben nach den berechneten Resultaten unmittelbar die gesuchten Winkel an.

Ist das Dreieck stumpfwinklicht, und man bezeichnet die größte Seite mit b, so kann nur der ihr gegenüber stehende Winkel B stumpf sein (I. §. 30.), und die beiden übrigen Winkel A und C müssen spitzig sein (I. §. 28. Zus. IV.).

Rücksichtlich der dreifachen Auflösung merke man sich nun Nachstehendes.

Findet man bei der I. Auflösung bei der Bestimmung des Winkels *B* nach dem Lehrsatze des §. 116., daß $a^2 + c^2$ kleiner ist als b^2, somit $b^2 > a^2 + c^2$, was wohl möglich ist (Arithm. IV. §. 1.), wenn gleich $a + c > b$ ist (I. §. 18. Zus. II.), so wird die Differenz $a^2 + c^2 - b^2$ negativ, weßhalb auch der Kosinus von B negativ ist, woraus man erkennt, daß der Winkel B stumpf, und daher, um ihn zu finden, zu jenem spitzigen Winkel der Tabelle, welcher dem Logarithmus des Kosinus von B entspricht, der stumpfe Nebenwinkel zu nehmen ist (§. 69. Zus.), den man erhält, wenn man jenen spitzigen Winkel von 180 Grad abzieht (I. §. 11. Zus. III.). Ist aber $a^2 + c^2 > b^2$, so wird die Differenz $a^2 + c^2 - b^2$, und deßhalb auch der Kosinus von *B* positiv, weßhalb dann der spitzige Winkel als der gesuchte angenommen wird.

Weil allemal zwei Seiten eines Dreieckes zusammen größer sind als die dritte (I. §. 18. Zus. II.), so erhält man bei der II. Auflösung nach dem Lehrsatze des §. 117. lauter positive Faktoren, und der Sinus erhält nach der Berechnung immer das Zeichen (+), wie es auch zur Ausziehung der Quadratwurzel nothwendig ist (Arithm. III. §. 73. Zus. III.), und es die Beschaffenheit des Sinus erfordert, welcher bei allen spitzigen und stumpfen Winkeln, welche bei Dreiecken möglich sind, positiv ist (§. 66.). Da überdieß jeder spitzige Winkel mit seinem stumpfen Nebenwinkel, wie den nämlichen Kosinus, eben so auch den nämlichen Sinus hat (§. 62. Zusatz III.), so muß man aus der Summe der drei gefundenen Winkel, welche 180 Grad betragen soll (I. §. 43.), ermessen, ob der nach der Tabelle bestimmte spitzige Winkel B, oder sein stumpfer Nebenwinkel, welcher $= 180^0 - B$ zu nehmen ist.

Bei der III. Auflösung sucht man nach dem III. Zusatze des §. 118. zuerst die spitzigen Winkel *A* und C, derer Kosinus immer positiv ist, und die Rechnung gibt bei der Differenz $\frac{1}{2}(b + d)$ das Zeichen (+), da $b > d$, und deßhalb $\frac{1}{2}b > \frac{1}{2}d$.

In diesem letzten Falle findet man den dritten Winkel B gleich bei der Rechnung selbst in seiner wirklichen Größe, er mag spitzig oder stumpf sein, indem er dadurch bestimmt wird, daß man $A + C$ von 180 Grad abzieht.

Anmerkung: 1) Will man nach der I. und II. Auflösung direkte nur zwei Winkel berechnen, und den dritten aus diesen beiden bestimmen (I. §. 43. Zus. I.), so bestimmt man zuerst die beiden Winkel A und C, die allemal spitzig sind, um aus ihnen wegen der bekannten Summe aller drei Winkel den dritten Winkel B zu erhalten, der auch stumpf sein kann.

2) Durch das Beispiel des folgenden §. wird das in diesem §. Gesagte mehr erläutert werden.

§. 129.

V. Beispiel:

Man soll in einem Dreiecke die drei Winkel berechnen, wenn die Seiten desselben 50, dann 90 und 60 Schuh betragen.

I. Auflösung:

1) Man bezeichne die Seiten und Winkel auf die vorige Weise, so daß $a = 50$, $b = 90$, und $c = 60$ Schuh, und A, B und C der Ordnung nach die opponirten Winkel anzeigen, von welchen der mittlere Winkel B, welcher der größten Seite $b = 90$ Schuh gegenüber steht, der größte ist;

2) In diesem Beispiele ist

$a = 50$	$2ab = 9000$	$a^2 = 2500$	$2a^2 = 5000$
$b = 90$	$2ac = 6000$	$b^2 = 8100$	$2b^2 = 16200$
$c = 60$	$2bc = 10800$	$c^2 = 3600$	$2c^2 = 7200$,

und $a^2 + b^2 + c^2 = 14200$,
mithin $a^2 + b^2 - c^2 = 7000$,
dann $a^2 + c^2 - b^2 = -2000$,
und $b^2 + c^2 - a^2 = 9200$;

3) Nach §. 116. ist

$$\text{Cosin. } A = \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \times r,$$

dann Cosin. $B = \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right) \times r$,

und Cosin. $C = \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) \times r$;

folglich Cosin. $A = \frac{9200}{10800}\, r = \frac{23}{27}\, r$,
dann Cosin. $B = -\frac{2000}{6000}\, r = -\frac{1}{3}\, r$,
und Cosin. $C = \frac{7000}{9000}\, r = \frac{7}{9}\, r$;

Nun ist *Log.* Cosin. A = *Log.* $^{23}/_{27}\, r = 9{,}9303640$ = *Log.* Cosin. 31° 35′ 10″,

dann *Log.* Cosin. B = *Log.* $^{1}/_{3}\, r = 9{,}6228787$ = Cosin. 70° 31′ 43″ = — Cosin. 109° 28′ 17″, weil hier der Kosinus negativ, und deßwegen der Winkel B stumpf ist;

endlich ist *Log.* Cosin. C = *Log.* $^{7}/_{9}\, r = 9{,}8908555$ = *Log.* Cosin. 38° 56′ 34″.

Es ist demnach beinahe der Winkel

A =	31°	35′	10″,
B =	109	28	17,
C =	38	56	34,

und $A + B + C$ = 180° 0′ 1″.

II. Auflösung:

1) Man bezeichne die gegebenen Seiten auf die vorige Weise mit a, b und c, und die ihnen opponirten Winkel mit A, B und C, so daß a = 50, b = 90 und c = 60 Schuh ist;

2) Hier ist wieder

a = 50	2a = 100	200 — 100 = 100,
b = 90	2b = 180	200 — 180 = 20,
c = 60	2c = 120	200 — 120 = 80,

a + b + c = 200, 2ab = 9000, 2ac = 6000, und 2bc = 10800; ferner ist 200 × 100 × 20 × 80 = 32000000, und *Log.* $\sqrt{32000000}$ = *Log.* 32000000 : 2 = 7,5051500 : 2 = 3,7525750, das ist, nach dem I. Zusatze des §. 117. ist *Log.* p = 3,7525750;

3) Nach dem I. und II. Zusatze dieses §. ist daher

$$\text{Sin. } A = \frac{p \cdot r}{2bc} = \frac{pr}{10800},$$

dann $\text{Sin. } B = \frac{pr}{2ac} = \frac{pr}{6000}$,

und $\text{Sin. } C = \frac{pr}{2ab} = \frac{pr}{9000}$;

folglich ist, da $\text{Log. } pr = \text{Log. } p + \text{Log. } r$ $= 3,7525750 + 10 = 13,7525750$,

$\text{Log. Sin. } A = \text{Log. } \frac{pr}{10800} = 9,7191512$ $= \text{Log. Sin. } 31^\circ\ 35'\ 10''$,

dann $\text{Log. Sin. } B = \text{Log. } \frac{pr}{6000} = 9,9744237$ $= \text{Log. Sin. } 70^\circ\ 31'\ 43''$,

und $\text{Log. Sin. } C = \text{Log. } \frac{pr}{9000} = 9,7983325$ $= \text{Log. Sin. } 38^\circ\ 56'\ 33''$;

4) Es wäre demnach

$A = 31^\circ\ 35'\ 10''$,
$B = 70\ \ 31\ \ 43$,
$C = 38\ \ 56\ \ 33$,

und $A + B + C = 141^\circ\ 3'\ 26''$;
da aber diese Summe von 180 Grad zu sehr abweicht (I. §. 43.), so ist der größte Winkel B stumpf, und man muß anstatt des in der Tabelle gefundenen Winkels $B = 70^\circ\ 31'\ 43''$ dessen stumpfen Nebenwinkel nehmen, welcher $= 180^\circ - 70^\circ\ 31'\ 43'' = 109^\circ\ 28'\ 17''$, weßhalb in diesem Dreiecke beinahe der Winkel

$A = 31^\circ\ 35'\ 10''$,
$B = 109\ \ 28\ \ 17$,
$C = 38\ \ 56\ \ 33$,

und $A + B + C = 180^\circ\ 0'\ 0''$.

III. Auflösung:

1) Man bezeichne die Seiten und Winkel auf die vorige Weise, so daß $a = 50$, $b = 90$ und $c = 60$ Schuh;

2) Nach §. 118. ist

$$d = \frac{(c+a)(c-a)}{b} = \frac{110 \times 10}{90} = \frac{110}{9} = 12,22222,$$

dann $b = 90,$
$d = 12,22222,$

also $b + d = 102,22222,$
$b - d = 77,77778,$
und $\frac{1}{2}(b + d) = 51,11111,$
$\frac{1}{2}(b - d) = 38,88889;$

3) Nach dem III. Zusatze des §. 118. ist

$$\text{Cosin. } A = \frac{\frac{1}{2}(b + d)\, r}{c},$$

und $$\text{Cosin. } C = \frac{\frac{1}{2}(b - d)\, r}{a};$$

mithin $$\text{Cosin. } A = \frac{51,11111 \times r}{60},$$

und $$\text{Cosin. } C = \frac{38,88889 \times r}{50};$$

nun ist $\text{Log. Cosin. } A = \text{Log. } \left(\frac{51,11111 \times r}{60}\right)$
$= 9,9303641 = \text{Log. Cosin. } 31^\circ\ 35'\ 10'',$

und $\text{Log. Cosin. } C = \text{Log. } \left(\frac{38,88889 \times r}{50}\right)$
$= 9,8908547 = \text{Log. Cosin. } 38^\circ\ 56'\ 34'',$

folglich $A + C = 70^\circ\ 31'\ 44''$, weßhalb der Winkel $B = 180^\circ - (A + C) = 180^\circ - 70^\circ\ 31'\ 44''$ $= 109^\circ\ 28'\ 16''$.

Anmerkung: 1) Durch das gegenwärtige, und das im §. 127. angeführte Beispiel wurde gezeigt, wie man aus den drei gegebenen Seiten die Winkel berechnen kann, wenn das ungleichseitige schiefwinklichte Dreieck spitzwinklicht oder stumpfwinklicht ist.

2) Die Bestimmung des Flächeninhaltes des Dreieckes wurde hier nicht mehr vorgenommen, weil sie auch in diesem Falle, wenn nämlich ein stumpfer Winkel vorkömmt, ganz auf die im §. 127. angezeigte Weise geschieht.

3) Wie zum Logarithmus des Sinus und des Kosinus und zum Logarithmus der Tangens und Kotangens die Größe des Winkels bis auf Sekunden angegeben wird, ist im III. Abschnitte des vorigen Hauptstückes ausführlich gezeigt worden.

§. 130.

VI. Beispiel:

Wie groß ist der Perimeter und der Flächeninhalt eines regulären Achteckes, wenn der Durchmesser des um dasselbe beschriebenen Kreises 50 Schuh beträgt?

Auflösung:

1) Weil hier der Durchmesser des um das Achteck beschriebenen Kreises 50 Schuh beträgt, so ist der Halbmesser desselben oder $a = 25$ Schuh, ferner ist $n = 8$, und der Zentriwinkel B ist $= \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$, und $\frac{1}{2}B = 22^\circ\ 30'$;

2) Nach dem II. und III. Zusatze des §. 123. ist, wenn man den Umfang oder Perimeter des regulären Achteckes durch P oder Perim., und dessen Flächeninhalt durch S ausdrückt,

$$\text{Perim.} = \frac{2an\ .\ \text{Sin.}\ \frac{1}{2}B}{r},$$

$$\text{und } S = \frac{\frac{1}{2}na^2 \times \text{Sin. } B}{r} = \frac{1}{2}na^2 \times \frac{\text{Sin. } B}{r},$$

$$\text{folglich Log. Perim.} = \text{Log. } 2an + \text{Log. } \frac{\text{Sin } \frac{1}{2}B}{r},$$

$$\text{und Log. } S = \text{Log. } a^2 + \text{Log. } \tfrac{1}{2}n + \text{Log. } \frac{\text{Sin. } B}{r};$$

3) Nun ist, weil $a = 25$, dann $n = 8$, ferner $B = 45^\circ$, und $\frac{1}{2}B = 22^\circ\ 30'$,

$$\text{Log. } 2an = \text{Log. } 400 = 2{,}6020600,$$

$$\text{Log. } \frac{\text{Sin. } \frac{1}{2}B}{r} = \text{Log. } \frac{\text{Sin. } 22^\circ 30'}{r} = 9{,}5828397 - 10,$$

$$\text{also Log. Perim.} = 12{,}1848997 - 10$$

$$= 2{,}1848997 = \text{Log. } 153{,}07,$$

und Perim. $= 153{,}07$ Schuh;

ferner $\quad \text{Log. } a = \text{Log. } 25 = 1,3979400$
$\times 2$

also $\text{Log. } a^2 = \text{Log. } 25^2 = 2,7958800$,
$\text{Log. } \frac{1}{2} n = \text{Log. } 4 = 0,6020600$,
$$\text{Log. } \frac{\text{Sin. } B}{r} = \text{Log. } \frac{\text{Sin. } 45^\circ}{r} = 9,8494850 - 10,$$

mithin $\text{Log. } S = 13,2474250 - 10$
$= 3,2474250 = \text{Log. } 1767,77$,
und $S = 1767,77$ □ Schuh.

Es beträgt demnach beinahe der Perimeter oder Umfang dieses regulären Achteckes 153,07 Schuh, dann eine Seite als der 8te Theil des Perimeters 19,134 Schuh, und der Flächeninhalt desselben 1767,77 Quadratfuß.

I. Zusatz: Berechnet man unmittelbar aus dem bekannten Durch- oder Halbmesser des um das reguläre Vieleck beschriebenen Kreises die Seite b desselben, so benützt man die im II. Zusatze des §. 123. aufgestellte Formel, nach welcher

$$b = \frac{2a \cdot \text{Sin. } \frac{1}{2} B}{r}.$$

Im vorstehenden Beispiele ist $a = 25$, also $2a = 50$, und $B = \frac{1}{8}\, 360^\circ = 45^\circ$, somit $\frac{1}{2} B = 22^\circ\, 30'$, weßhalb

$$b = 50 \times \frac{\text{Sin. } 22^\circ\, 30'}{r},$$

und $\text{Log. } b = \text{Log. } 50 + \text{Log. } \frac{\text{Sin. } 22^\circ\, 30'}{r}$;

nun ist $\text{Log. } 50 = 1,6989700$,
$$\text{Log. } \frac{\text{Sin. } 22^\circ\, 30'}{r} = 9,5828397 - 10,$$

also $\text{Log. } b = 11,2818097 - 10$
$= 1,2818097 = \text{Log. } 19,134$.

Die Seite b dieses regulären Achteckes beträgt demnach beinahe wieder 19,134 Schuh.

II. Zusatz: Nach den im §. 123. und in den beigefügten Zusätzen angegebenen Formeln kann man aus der bekannten Seite b eines in den Kreis beschriebe-

nen regulären Vielecks den Durch- oder Halbmesser desselben, und sowohl den Umfang als auch den Flächeninhalt des regulären Vieleckes berechnen; indem

$$\text{Perim.} = n \times b = bn,$$

$$\text{dann } a = \frac{b \cdot r}{2 \text{ Sin. } \frac{1}{2} B} = \frac{\frac{1}{2} b \cdot r}{\text{Sin. } \frac{1}{2} B},$$

$$\text{und } S = \frac{nb^2 r}{4 \text{ Tang. } \frac{1}{2} B} = \frac{\frac{1}{4} nb^2 \times r}{\text{Tang. } \frac{1}{2} B};$$

folglich $\text{Log. Perim.} = \text{Log. } b + \text{Log. } n,$
dann $\text{Log. } a = \text{Log. } \frac{1}{2} b + \text{Log. } r - \text{Log. Sin. } \frac{1}{2} B,$
und $\text{Log. } S = \text{Log. } \frac{1}{4} n + \text{Log. } b^2 + \text{Log. } r - \text{Log. Tang. } \frac{1}{2} B.$

Setzt man, es habe die Seite b eines in den Kreis beschriebenen regulären Zwölfeckes 20 Schuh, und es sei deßhalb $b = 20$, dann $n = 12$, und $B = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$, somit $\frac{1}{2} b = 10$, dann $\frac{1}{4} n = 3$, und $\frac{1}{2} B = 15^\circ$, so ist

$$\text{Perim.} = bn = 20 \times 12 = 240;$$

dann $\text{Log. } (\frac{1}{2} b \times r) = 11,$
$\text{Compl. dec. Log. Sin. } \frac{1}{2} B = 0{,}5870038 - 10,$

also $\text{Log. } a = 11{,}5870038 - 10$
$= 1{,}5870038 = \text{Log. } 38{,}637,$
und $a = 38{,}637$ Schuh;

endlich ist $\text{Log. } r = 10,$
$\text{Log. } \frac{1}{4} n = \text{Log. } 3 = 0{,}4771213,$
$\text{Log. } b^2 = \text{Log. } 400 = 2{,}6020600,$
$\text{Compl. dec. Log. Tang. } 15^\circ = 0{,}5719475 - 10,$

also $\text{Log. } S = 13{,}6511288 - 10$
$= 3{,}6511288 = \text{Log. } 4478{,}36$, und $S = 4478{,}36$ □ Schuh.

Wenn demnach die Seite eines regulären Zwölfeckes 20 Schuh beträgt, so hält der Umfang desselben 240 Schuh, und dessen Flächeninhalt beinahe 4478,36 □ Schuh, während der Halbmesser des um dieses Zwölfeck beschriebenen Kreises beinahe 38,637 Fuß hat.

III. Zusatz: Nach dem I. und III. Zusatze des §. 123. kann man aus dem Flächeninhalte des regulären Vieleckes, und der bestimmten Anzahl seiner Ecke

sowohl die Seite und den Perimeter desselben, als auch den Halbmesser des um das Vieleck beschriebenen Kreises berechnen. Es ist nämlich

$$S = \frac{\frac{1}{2}na^2 \,.\, \text{Sin. } B}{r},$$

$$\text{mithin } a = \sqrt{\left(\frac{2S \,.\, r}{n \,.\, \text{Sin. } B}\right)} \text{ (Arithm. IV. §. 20.)},$$

$$\text{und } b = \sqrt{\left(\frac{4S \,.\, \text{Tang. } \frac{1}{2}B}{nr}\right)},$$

$$\text{folglich Log. } a = \frac{\text{Log. } 2S + \text{Log. } r - \text{Log. } (n \,.\, \text{Sin. } B)}{2},$$

$$\text{und Log. } b = (\text{Log. } 4S + \text{Log. Tang. } \tfrac{1}{2}B - \text{Log. } nr) : 2.$$

Weiß man die Seite des regulären Vieleckes, so ist auch dessen Perimeter bekannt; indem Perim. $= b \times n = bn$.

Nimmt man an, es betrage der Flächeninhalt eines regulären Zehenecks 4000 Quadratschuh, und man will daraus sowohl den Halbmesser a des um dasselbe beschriebenen Kreises, als auch die Seite b und den Perimeter des Zehenecks berechnen, so ist, weil $S = 4000$, $n = 10$, und $B = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$, also $2S = 8000$, $4S = 16000$, und $\frac{1}{2}B = 18^\circ$,

$$a = \sqrt{\left(\frac{8000 \times r}{10 \,.\, \text{Sin. } 36^\circ}\right)},$$

$$\text{und } b = \sqrt{\left(\frac{16000 \,.\, \text{Tang. } 18^\circ}{10 \times r}\right)}.$$

Nun ist Log. $(8000 \times r) = 13{,}9030900$,
Log. $(10 \times \text{Sin. } 36^\circ) = 10{,}7692187$,

also Log. $\left(\frac{8000 \,.\, r}{10 \,.\, \text{Sin. } 36^\circ}\right) = 3{,}1338713$,
: 2

folglich Log. $a = 1{,}5669356$
$=$ Log. $36{,}8023$, und $a = 36{,}8023$;

fer-

ferner ist

$$\text{Log. } 16000 = 4{,}2041200,$$
$$\text{Log. Tang. } 18^\circ = 9{,}5117760,$$
$$\text{Log. } (16000 \times 18^\circ) = 13{,}7158960$$
$$\text{Log. } (10 \times r) = 11,$$
$$\text{also Log. } b = 2{,}7158960 : 2$$
$$= 1{,}3579480 = \text{Log. } 22{,}8007,$$

und $b = 22{,}8007$, somit beinahe $= 22{,}8$.

Endlich ist Perim. $= b \times n = bn = 22{,}8007 \times 10 = 228{,}007$.

Wenn demnach der Flächeninhalt eines regulären Zeheneckes 4000 Quadratfuß beträgt, so beträgt beinahe seine Seite 22,8 Schuh, und sein Perimeter 228,007 oder 228 Schuh, während dann der Radius des um dieses reguläre Vieleck beschriebenen Kreises beinahe 36,8923 oder 36,9 Schuh hat.

Anmerkung: 1) Will man bei diesen Rechnungen eine Probe machen, so nimmt man die gefundenen Stücke als bekannt an, und berechnet daraus die anfangs bekannt gewesenen Stücke.

Thut man dieses im vorstehenden Beispiele des III. Zusatzes, und berechnet man aus dem gefundenen Halbmesser $a = 36{,}8923$ Schuh, oder aus der gefundenen Seite $b = 22{,}8007$ Schuh, den Flächeninhalt des regulären Zeheneckes, so findet man wieder $S = 4000$, indem (§. 123.)

$$S = \frac{\frac{1}{2} na^2 \cdot \text{Sin. B}}{r} = \frac{5 \times 36{,}8923^2 \times \text{Sin. } 36^\circ}{r}$$

$= 4000$, da $3{,}6020599$ beinahe $=$ Log. 4000 $=$ Log. S;

$$\text{und } S = \frac{n \cdot b^2 \cdot r}{4 \text{ Tang. } \frac{1}{2} B} = \frac{10 \times 22{,}8007^2 \times r}{4 \text{ Tang. } 18^\circ}$$

$= 4000$, da $3{,}6020600 =$ Log. 4000 $=$ Log. S.

2) In diesem Beispiele ist der Halbmesser a des um das reguläre Zeheneck beschriebenen Kreises $= 36{,}8923$, und der Radius des Kreises, der den berechneten trigonometrischen Linien zum Grunde liegt, ist $= 10^{10} =$ 10.000'000.000; daraus ersieht man offenbar, daß diese zwei Halbmesser ganz verschieden, und nicht mit einander zu verwechseln sind.

3) Aus den angeführten Beispielen ersieht man auch, daß sich die regelmäßigen Vielecke durch die Trigonometrie bequemer und genauer berechnen oder auflösen

lassen, als es nach den im I. Theile dieses Lehrbuches aufgestellten geometrischen Lehrsätzen geschehen kann.

4) Weil man den Kreis als ein unendliches reguläres Vieleck betrachten kann, welches sehr viele und sehr kleine Seiten hat (I. §. 130. Zus. I. und II.), so ließen sich in Absicht auf den Kreis nach den bei den regulären Vielecken und dem gleichschenklichten Dreiecke aufgestellten Lehrsätzen (§. 109. und §. 110. und §. 123.) durch Hülfe der Trigonometrie noch mehrere Aufgaben zur Bestimmung der Länge einer Sehne aus dem bekannten Durchmesser und Bogen, dann zur Berechnung des Segmentes des Kreises rc. anführen; es sind aber hierüber wegen der bereits ausführlich dargestellten Auflösungen keine besonderen Beispiele mehr nöthig, da man sich selbst nach den bisherigen Anweisungen in dieser Hinsicht beliebige Aufgaben bilden kann, und ich führe der Kürze wegen im folgenden §. nur eine dieser Aufgaben an.

§. 131.

VII. Beispiel:

Wie groß ist der Umfang oder die Peripherie eines Kreises, bei welchem der Durchmesser = 1, und deßhalb der Halbmesser = ½ = 0,5 ist?

Auflösung:

1) Weil man den Kreis als ein unendliches reguläres Vieleck betrachten kann, so denke man sich die Peripherie desselben in 1296000 gleiche Theile getheilt, so daß ein solcher Theil oder Bogen das Maaß eines Zentriwinkels von einer Sekunde ist, da die Peripherie 360 Grad hat, und 360 Grad die Anzahl von 1296000 Sekunden geben (Arithm. I. §. 86.);

2) Weil die Sehne eines solchen Bogens sehr klein ist, so kann man sie ohne merklichen Fehler als den Bogen selbst annehmen (I. §. 130.), so daß 1296000 solche Sehnen oder Bögen die Peripherie des Kreises geben.

3) Betrachtet man den Kreis auf diese Weise als ein reguläres Vieleck von n Seiten, so ist der Zentriwinkel B = 1 Sekunde, mithin ½ B = ½″ = 0,5″,

und der Halbmesser a dieses Kreises ist die Hälfte der Zahl 1, also $a = \frac{1}{2} = 0{,}5$;

4) Nach dem II. Zusatze des §. 123. ist die Peripherie dieses Kreises, oder

$$\text{Perim.} = n \cdot b = \frac{2an \cdot \text{Sin.}\ \frac{1}{2}B}{r},$$

$$\text{also Periph.} = \frac{2 \times 0{,}5 \times 1296000 \times \text{Sin.}\ 0{,}5''}{r};$$

nun ist Log. 2 = 0,3010300,

Log. a = Log. 0,5 = 0,6989700 — 1,

Log. n = Log. 1296000 = 6,1126050,

$$\text{Log.}\ \frac{\text{Sin.}\ \frac{1}{2}B}{r} = \text{Log.}\ \frac{\text{Sin.}\ 0{,}5''}{r} = 4{,}3845449 - 10,$$

also Log. (nb) = Log. Periph. = 11,4971499 — 11
= 0,4971499 = Log. 3,14159265.

Es beträgt demnach die Peripherie des Kreises beinahe 3,14159265.

Zusatz: Wenn der Durchmesser des Kreises = 1 gesetzt wird, somit dessen Radius $= \frac{1}{2} = 0{,}5$ ist, so ist die Peripherie des Kreises der ludolphischen Verhältnißzahl π gleich (I. §. 132. Zus. III.); aus diesem Grunde kann man durch die Auflösung dieser Aufgabe diese Verhältnißzahl π finden, und deßhalb ebenfalls darnach das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie bestimmen (I. §. 132.).

Anmerkung: Für π findet man beinahe die nämliche Zahl, wenn man sich die Peripherie in 21600 Theile getheilt vorstellt, und einen solchen Theil oder Bogen als die Sehne eines Zentriwinkels von einer Minute betrachtet; in diesem Falle geben 21600 solche Sehnen oder Bögen die Peripherie, indem die Peripherie oder

$$\text{Perim.} = n \cdot b = \frac{2an \cdot \text{Sin.}\ \frac{1}{2}B}{r},$$

$$\text{somit Periph.} = \frac{2 \times 0{,}5 \times 21600 \times \text{Sin.}\ 0{,}5'}{r}.$$

Es ist Log. 2 = 0,3010300

Log. 0,5 = 0,6989700 — 1

Log. 21600 = 4,3344538

$$\text{Log.}\ \frac{\text{Sin.}\ 0{,}5'}{r} = 6{,}1626961 - 10;\ \text{also}$$

0,4971499 = Log. 3,14159265 = Log. periph. circuli.

§. 132.

Tabellarische Darstellung der Formeln zur Auflösung aller Dreiecke.

Zur bequemeren Benützung enthalten die nachstehenden drei Tabellen die bisher angeführten Formeln, um darnach aus den gegebenen Stücken eines geradlinigten ebenen Dreieckes die übrigen Stücke durch Rechnung zu finden.

Jede dieser Tabellen enthält drei Spalten; in der ersten kommen allemal die gegebenen oder bekannten Stücke vor; die zweite enthält die gesuchten Stücke, und die dritte Spalte gibt die Formel an, nach welcher die Auflösung geschieht; dabei sind zugleich die §§. angegeben, in welchen die vorkommenden Formeln entwickelt, und als allgemein giltig erwiesen wurden, und der Buchstabe r bedeutet immerhin den angenommenen Halbmesser 10^{10}, dessen Logarithmus die Zahl 10 ist.

Bei der I. Tabelle, welche zur Auflösung der rechtwinklichten Dreiecke gehört, ist der rechte Winkel, dessen Sinus dem Radius oder r gleich ist, mit H und die Hypotenuse mit h bezeichnet, die beiden spitzigen Winkel aber sind durch A und B, und die ihnen opponirten Seiten durch a und b ausgedrückt.

Bei der II. und III. Tabelle sind rücksichtlich der gleichschenklichten, gleichseitigen und ungleichseitigen Dreiecke die Winkel mit A, B und C, und die ihnen opponirten Seiten der Ordnung nach mit a, b und c bezeichnet.

In der II. Tabelle, welche für die gleichschenklichten und gleichseitigen Dreiecke gehört, bezieht sich die einzige letzte oder 16te Formel auf das gleichseitige Dreieck, die übrigen 15 Formeln geben die Auflösung der gleichschenklichten Dreiecke an, wie es in der ersten und zweiten Spalte durch die Bezeichnung der gleichen Winkel und gleichen Seiten angedeutet ist.

Die III. Tabelle, welche die Auflösung der Dreiecke überhaupt enthält, richtet sich nach den in den zitirten §§. angeführten verschiedenen Fällen, in welchen ein Dreieck durch die gegebenen Stücke bestimmt ist.

In dieser letzten Tabelle kommen nebst den Buchstaben, welche die Seiten und Winkel angeben, auch noch die Buchstaben m, n, p und d vor.

Es ist aber

$$m = \tfrac{1}{2}(B + C) = \tfrac{1}{2}(180^\circ - A),$$

dann $n = \tfrac{1}{2}(B - C)$,

ferner $d = \frac{(c + a)(c - a)}{b}$, und

$$p = \sqrt{[(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)]}.$$

Nach diesen Vorerinnerungen, und den in den vorigen §§. ausführlich dargestellten Auflösungen wird man jetzt keine Schwierigkeit mehr in der Benützung dieser Tabellen finden, zumal da ich noch im nächsten §. mit Hinweisung auf diese Tabellen, um ihren Gebrauch zu zeigen, einige Beispiele auflösen werde.

I. Tabelle,

zur Auflösung der rechtwinklichten Dreiecke.

Man gibt	Man sucht	Nach der Formel (§. 106. und 107.)
I. a, b	h	1) $h = \sqrt{(a^2 + b^2)}$,
	A	2) $\text{Tang. } A = \frac{a \cdot r}{b}$,
	B	3) $\text{Tang. } B = \frac{b \cdot r}{a}$;
II. a, h	b	4) $b = \sqrt{((h + a)(h - a))}$
	A	5) $\text{Sin. } A = \frac{a \cdot r}{h}$,
	B	6) $\text{Cosin. } B = \frac{a \cdot r}{h}$;
III. b, h	a	7) $a = \sqrt{((h + b)(h - b))}$,
	A	8) $\text{Cosin. } A = \frac{b \cdot r}{h}$;
	B	9) $\text{Sin. } B = \frac{b \cdot r}{h}$;

Man gibt	Man sucht	Nach der Formel (§. 106. und 107.)
IV. a, A	b	10) $b = \frac{a \cdot r}{\text{Tang. } A}$,
	h	11) $h = \frac{a \cdot r}{\text{Sin. } A}$,
	B	12) $B = 90^\circ - A$;
V. a, *B*	b	13) $b = \frac{a \cdot r}{\text{Cotang. } B}$,
	h	14) $h = \frac{a \cdot r}{\text{Cosin. } B}$,
	A	15) $A = 90^\circ - B$;
VI. b, A	a	16) $a = \frac{b \cdot r}{\text{Cotang. } A}$,
	h	17) $h = \frac{b \cdot r}{\text{Cosin. } A}$;
VII. b, *B*	a	18) $a = \frac{b \cdot r}{\text{Tang. } B}$,
	b	19) $h = \frac{b \cdot r}{\text{Sin. } B}$;
VIII. h, A	a	20) $a = \frac{h \cdot \text{Sin. } A}{r}$,
	b	21) $b = \frac{h \cdot \text{Cosin. } A}{r}$;
IX. h, *B*	b	22) $a = \frac{h \cdot \text{Cosin. } B}{r}$,
	b	23) $b = \frac{h \cdot \text{Sin. } B}{r}$;
X. a, b	Δ	24) $\Delta = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{1}{2} a \cdot b = \frac{1}{2} b \cdot a$.

II. Tabelle,
zur Auflösung der gleichschenklichten und gleichseitigen Dreiecke.

Man gibt	Man sucht	Nach der Formel (§. 110 und 111.)
I. b und $c = a$	$A = C$	1) $\text{Cosin.}\, A = \text{Cosin.}\, C = \frac{b\,.\,r}{2c}$,
	B	2) $\text{Sin.}\, \frac{1}{2} B = \frac{b\,.\,r}{2c}$,
	$\triangle$	3) $\triangle = \frac{1}{2} b \times \sqrt{((c + \frac{1}{2} b)(c - \frac{1}{2} b))}$;
II. b und $A = C$	B	4) $B = 180^\circ - 2A$,
	$a = c$	5) $a = c = \frac{\frac{1}{2} b\,.\,r}{\text{Cosin.}\, A} = \frac{b\,.\,r}{2\,\text{Cosin.}\, A}$,
	$\triangle$	6) $\triangle = \frac{1}{4} b^2 \times \frac{\text{Tang.}\, A}{r} = (\frac{1}{2} b)^2 \times \frac{\text{Tang.}\, A}{r}$,
III. b, B	$A = C$	7) $A = C = \frac{1}{2}(180^\circ - B)$,
	$a = c$	8) $a = c = \frac{\frac{1}{2} b\,.\,r}{\text{Sin.}\, \frac{1}{2} B} = \frac{b\,.\,r}{2\,\text{Sin.}\, \frac{1}{2} B}$,
	$\triangle$	9) $\triangle = \frac{1}{4} b^2 \times \frac{\text{Cotang.}\, \frac{1}{2} B}{r} = (\frac{1}{2} b)^2 \times \frac{\text{Cotang.}\, \frac{1}{2} B}{r}$,
IV. $a = c$ und $C = A$	B	10) $B = 180^\circ - 2C$,
	b	11) $b = \frac{2c\,.\,\text{Cosin.}\, A}{r}$,
	$\triangle$	12) $\triangle = \frac{c^2\,.\,\text{Sin.}\, 2A}{2r}$ (§. 123. Zus. III.);
V. $a = c$ und B	$A = C$	13) $A = C = 90^\circ - \frac{1}{2} B$,
	b	14) $b = \frac{2c\,.\,\text{Sin.}\, \frac{1}{2} B}{r}$,
	$\triangle$	15) $\triangle = \frac{c^2\,.\,\text{Sin.}\, B}{2r}$;
VI. $a = b = c$	$\triangle$	16) $\triangle = \frac{1}{4} c^2 \times \sqrt{3} = (\frac{1}{2} c)^2 \times \sqrt{3}$.

III. Tabelle, zur Auflösung der Dreiecke überhaupt.

Man gibt	Man sucht	Nach der Formel
I. b, A, B oder b, A, C nach §. 119.	C	1) $C = 180^\circ - (A + B)$,
	B	2) $B = 180^\circ - (A + C)$,
	a	3) $a = \frac{b \,.\, Sin.\, A}{Sin.\, B}$,
	c	4) $c = \frac{b \,.\, Sin.\, C}{Sin.\, B}$,
	△	5) $\triangle = \frac{b^2 \,.\, Sin.\, A \,.\, Sin.\,(A + B)}{2r \,.\, Sin.\, B}$,
	△	6) $\triangle = \frac{b^2 \,.\, Sin.\, A \,.\, Sin.\, C}{2r \,.\, Sin.\,(A + C)}$;
II. b, c, B oder b, c, C nach §. 120.	C	7) $Sin.\, C = \frac{c \,.\, Sin.\, B}{b}$, wenn b > c, sonst ist das Dreieck unbestimmt;
	B	8) $Sin.\, B = \frac{b \,.\, Sin.\, C}{c}$, wenn c > b, sonst ist es unbestimmt,
	A	9) $A = 180^\circ - (B + C)$,
	a	10) $a = \frac{c \,.\, Sin.\, A}{Sin.\, C}$,
	△	11) $\triangle = \frac{1}{2} bc \times \frac{Sin.\,(B + C)}{r}$;
III. b, c, A nach §. 121. oder b, c, A	C	12) $Tang.\, C = c.\, Sin.\, A : \left(b - \frac{c.\, Cos.\, A}{r}\right)$,
	B	13) $B = 180^\circ - (A + C)$,
		$Tang.\, n = \frac{Tang.\, m \times (b - c)}{b + c}$, also, wenn $m = \frac{1}{2}(180^\circ - A)$,
	B	14) $B = m + n$,
	C	15) $C = m - n$,
	a	16) $a = \sqrt{\left(b^2 + c^2 - \frac{2bc.\, Cosin.\, A}{r}\right)}$,

Man gibt	Man sucht	Nach der Formel
IV. a, b, c nach §. 116. oder a, b, c nach §. 117. oder a, b, c nach §. 118.	$\triangle$	17) $\triangle = \frac{1}{2}bc . \times \frac{Sin. A}{r}$;
	A	18) $Cosin. A = \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) r$,
	B	19) $Cosin. B = \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right) r$,
	C	20) $Cosin. C = \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) r$,
	A	21) $Sin. A = \frac{p . r}{2bc}$, wenn p die im I. Zusatze des §. 117. angegebene Bedeutung hat.
	B	22) $Sin. B = \frac{p . r}{2ac}$,
	C	23) $Sin. C = \frac{p . r}{2ab}$,
	$\triangle$	24) $\triangle = \frac{p}{4} = \frac{1}{4}p$;
	A	25) $Cosin. A = \frac{\frac{1}{2}(b + d) r}{c}$,
	C	26) $Cosin. C = \frac{\frac{1}{2}(b - d) r}{a}$, wenn $d = \frac{(c + a)(c - a)}{b}$,
	B	27) $B = 180° - (A + C)$;
	$\triangle$	28) $\triangle = \frac{1}{2}b \times \sqrt{((c + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}d)(c - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}d))}$.

§. 133.

Beispiele zur Uebung in der Auflösung der Dreiecke nach den Tabellen des vorigen §.

I. Beispiel:

Wenn ein Perpendikel eines rechtwinklichten Dreieckes 260 Schuh, und der anliegende spitzige Winkel 36° 24′ hat; wie groß sind die übrigen Stücke dieses Dreieckes?

Auflösung:

Man drücke das gegebene Perpendikel durch b, und den gegebenen Winkel durch A aus, und man bezeichne die gesuchten Stücke durch B, a, h und △;

Weil hier b = 260 Schuh, dann A = 36° 24′, und das Dreieck rechtwinklicht ist, so ist die I. Tabelle des vorigen §. zu benützen, und zwar sind, da b und A gegeben sind, folgende Formeln zu gebrauchen:

1) zur Bestimmung des anderen spitzigen Winkels B die 15te Formel, nach welcher
A = 90° — B, und deßhalb auch B = 90° — A = 90° — 36° 24′ = 53° 36′;

2) Zur Bestimmung des anderen Perpendikels a und der Hypotenuse h die 16te und 17te Formel, nach welchen

$$a = \frac{b \,.\, r}{\text{Cotang. } A}, \text{ und } h = \frac{b \,.\, r}{\text{Cosin. } A};$$

Log. (br) = 12,4149733,	Log. (br) = 12,4149733,
Log. Cotang. A = 10,1323772,	Log. Cosin. A = 9,9057386,
also Log. a = 2,2825961	also Log. h = 2,5092347
= Log. 191,688, und	= Log. 323,024, und
a = 191,688 Schuh.	h = 323,024 Schuh;

3) Endlich zur Bestimmung des Flächeninhaltes die letzte oder 24te Formel, nach welcher

$$\triangle = \frac{a \,.\, b}{2} = {}^1\!/_2 a \,.\, b = {}^1\!/_2 b \,.\, a;$$

Log. ½b = Log. 130 = 2,1139434,
Log. a = Log. 191,688 = 2,2825961,

also Log. △ = 4,3965395
= Log. 24919,5, und △ = 24919,5 □ Schuh.

Wenn demnach in einem rechtwinklichten Dreiecke ein Perpendikel b = 260 Schuh, und der anliegende spitzige Winkel A = 36° 24′, so ist der andere spitzige Winkel B = 53° 36′, das andere Perpendikel a = 191,688 Schuh, die Hypotenuse h = 323,024 Schuh, und der Flächeninhalt dieses Dreieckes = 24919,5 □ Schuh; oder

wenn $b = 260$ Schuh, und $A = 36^\circ\ 24'$, so ist $B = 53^\circ\ 36'$, $a = 191{,}688$ Schuh, $h = 323{,}024$ Schuh, und $\triangle = 24919{,}5$ □ Schuh.

II. Beispiel:

Wenn eine als Grundlinie angenommene Seite eines Dreieckes 460 Schuh, und jeder der ihr anliegenden Winkel $52^\circ\ 48'$ hat, wie groß sind dann die übrigen Stücke dieses Dreieckes?

Auflösung:

1) Weil in diesem Beispiele die der gegebenen Seite anliegenden bekannten Winkel gleich sind, so sind auch die ihnen opponirten Seiten gleich, weßhalb das Dreieck gleichschenklicht (I. §. 23. Zus. I.), und die Auflösung nach der II. Tabelle des vorigen §. vorzunehmen ist;

2) Man bezeichne die gegebene Grundlinie mit b, und die anliegenden bekannten Winkel mit A und C, und suche in dieser Tabelle in der ersten Spalte die gegebenen Stücke b und $A = C$, man findet bei Nro. II. die Formeln zur Bestimmung der übrigen Stücke;

3) Nach der 4ten Formel ist, indem $A = C = 52^\circ\ 48'$,

$$B = 180^\circ - 2A = 180^\circ - 105^\circ\ 36' = 74^\circ\ 24'.$$

Dann nach der 5ten Formel ist, weil $b = 460$, und $A = C = 52^\circ\ 48'$,

$$a = c = \frac{\frac{1}{2}b\ .\ r}{\text{Cosin. } A};$$

$$\begin{array}{l} \text{Log. } (\tfrac{1}{2}b\ .\ r) = \text{Log. } (230 \times r) = 12{,}3617278, \\ \text{Log. Cosin. } A = \text{Log. Cosin. } 52^\circ\ 48' = 9{,}7814675, \\ \hline \end{array}$$

also $\text{Log. } a = \text{Log. } c = 2{,}5802603 = \text{Log. } 380{,}417$, und $a = c = 380{,}417$ Schuh.

Endlich ist nach der 6ten Formel

$$\triangle = (\tfrac{1}{2}b)^2 \times \frac{\text{Tang. } A}{r},$$

$$\text{Log. } \tfrac{1}{2}b = 2{,}3617278$$
$$\times\, 2$$

$$\text{also Log. } \tfrac{1}{4}b^2 = 4{,}7234556,$$

$$\text{dann Log. } \frac{\text{Tang. A}}{r} = 10{,}1197346 - 10$$

$$\text{mithin Log. } \triangle = 14{,}8431902 - 10$$
$= 4{,}8431902 =$ Log. 69693,17, und
$\triangle = 69693{,}17$ □ Fuß.

Wenn demnach in einem Dreiecke $b = 460$ Sch., und $A = C = 52^\circ\ 48'$, so ist $B = 74^\circ\ 24'$, dann $a = c = 380{,}417$ Schuh, und der Flächeninhalt ist $= 69693{,}17$ □ Schuh.

III. Beispiel:

Wie groß ist der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreieckes, dessen Seite 89,6 Schuh hat?

Auflösung:

1) Weil das gleichseitige Dreieck wie ein gleichschenklichtes betrachtet wird, und hier $a = b = c = 89{,}6$, somit $\tfrac{1}{2}c = 44{,}8$ Schuh, so gibt die 16te oder letzte Formel der II. Tabelle die verlangte Auflösung, nach welcher

$$\triangle = (\tfrac{1}{2}c)^2 \times \sqrt{3}, \text{ also}$$
$$\triangle = 44{,}8^2 = \sqrt{3};$$

Log. 44,8 = 1,6512780	Log. 3 = 0,4771213
× 2	: 2
Log. $(\tfrac{1}{2}c)^2 = 3{,}3025560$,	Log. $\sqrt{3} = 0{,}2385606$,
Log. $\sqrt{3} = 0{,}2385606$,	

also Log. $\triangle = 3{,}5411166 =$ Log. 3476,3, und $\triangle = 3476{,}3$ □ Schuh, das ist, der Flächeninhalt dieses gleichseitigen Dreieckes beträgt beinahe 3476,3 □ Fuß.

IV. Beispiel:

Wenn eine Seite eines Dreieckes 448 Schuh, und der eine der ihr anliegenden Winkel 36° 24', und der

andere 44° 46′ hat, wie groß sind die übrigen Stücke dieses Dreieckes?

Auflösung:

1) Weil in diesem Dreiecke die beiden gegebenen Winkel 36° 24′ und 44° 46′ haben, und deßhalb der dritte Winkel 98° 50′ hat (I. §. 43. Zus. I.), so ist das Dreieck ungleichseitig (I. §. 30. Zus. III.), und auch schiefwinklicht, da kein rechter Winkel da ist (I. §. 29. d.); aus diesen Gründen ist zur Auflösung die III. Tabelle des vorigen §. zu benützen;

2) Man bezeichne die gegebene Seite durch b, und die bekannten anliegenden Winkel mit A und C, so daß b = 448, dann A = 36° 24′ und C = 44° 46′;

3) Nach der 2ten Formel dieser Tabelle ist der Winkel B = 180° — (A + C) = 180° — 81° 10′ = 98° 50′ wozu der Winkel von 81° 10′ das Supplement ist (§. 64. d.), welches mit dem Winkel B = 98° 50′ den nämlichen Sinus hat (§. 65.);

4) Nach der 3ten und 4ten Formel dieser Tabelle findet man die Seiten a und c; es ist

$$a = \frac{b\,.\,\text{Sin. }A}{\text{Sin. }B}, \text{ und } c = \frac{b\,.\,\text{Sin. }C}{\text{Sin. }B};$$

mithin, da b = 448, A = 36° 24′, C = 44° 46′, und B = 98° 50′,

Log. b = 2,6512780,	Log. b = 2,6512780,
Log. Sin. A = 9,7733614,	Log. Sin. C = 9,8477091,
Compl. ꝛc. B = 0,0051819—10,	Compl. ꝛc. B = 0.0051819—10,
also Log. a = 12,4298213—10	also Log. c = 12,5041690—10
= 2,4298213 = Log. 269,041,	= 2,5041690 = Log. 319,278,
und a = 269,041 Schuh;	und c = 319,278 Schuh.

5) Endlich findet man nach der 6ten Formel dieser Tabelle den Flächeninhalt des Dreieckes, nach welcher

$$\triangle = \frac{b^2\,.\,\text{Sin. }A\,.\,\text{Sin. }C}{2r\,.\,\text{Sin. }(A + C)};$$

nun ist, weil b = 448, dann A = 36° 24′, und C = 44° 46′,

$$\text{Log.} (b^2 . \text{Sin. A . Sin. C}) = 24{,}9236265,$$
$$\text{und Log. 2r . Sin. (A + C)} = 20{,}2958481,$$

also $\text{Log.} \triangle = 4{,}6277784$
$= \text{Log. } 42440{,}2$, und $\triangle = 42440{,}2$ □ Schuh.

Wenn demnach in einem Dreiecke
b = 448 Sch., A = 36° 24′, und C = 44° 46′, so ist
B = 98° 50′, a = 269,041 Schuh, c = 319,278 Schuh, und der Flächeninhalt ist = 42440,2 □ Sch.

Anmerkung: 1) Bei den Tabellen des vorigen §. kommen manchmal für das nämliche gesuchte Stück mehrere Werthe vor, damit man bei der wirklichen Berechnung die bequemeren Formeln wählen kann; auf diese Weise ist z. B. in der II. Tabelle die 6te Formel $\triangle = (\frac{1}{2}b)^2 \times \frac{\text{Tang. A}}{r}$ bequemer als die Formel $\triangle = \frac{1}{4} b^2 \times \frac{\text{Tang. A}}{r}$.

2) Die angezeigte Berücksichtigung der Zeichen der trigonometrischen Linien findet nur bei der III. Tabelle des vorigen §. Statt; indem bei der I. und II. Tabelle sämmtliche trigonometrische Linien der vorkommenden Winkel positiv sind.

Es kommen nämlich in der I. Tabelle bei der Auflösung der rechtwinklichten Dreiecke nur die beiden spitzigen Winkel vor, bei welchen der Sinus und Kosinus, und die Tangens und Kotangens positiv ist.

Hat das gleichschenklichte Dreieck einen stumpfen Winkel, so kann es nur (Fig. 34.) der Winkel B an der Spitze sein, da die beiden übrigen Winkel an der Grundlinie allemal spitzig sind (I. §. 28. Zus. V.); der Winkel B ist auch immer ein hohler Winkel und als solcher kleiner als zwei rechte Winkel, weßhalb die Hälfte von B oder $\frac{1}{2} B < R$, gleichwie auch die Summe der gleichen Winkel A und C, das ist, A + C, oder 2A = 2C < 2R. In der II. Tabelle ist demnach der Sinus der vorkommenden Winkel von $\frac{1}{2}$B und B, und von A = C, wie auch von 2A = 2C positiv (§. 66.), und alle trigonometrischen Linien der spitzigen Winkel $\frac{1}{2}$B, und A = C sind ebenfalls positiv (§. 82. Anmerk. 2).

Anwendung der Geometrie und ebenen Trigonometrie auf die Feldmeßkunst.

I. Hauptstück.

Die praktische Geometrie.

I. Abschnitt.

Von dem Gegenstande der Feldmeßkunst.

§. 134.

Erklärungen und Lehnsätze.

a) Eine Fläche, auf welcher die Richtungen der Schwere senkrecht stehen (I. §. 169. a.), heißt eine Horizontalfläche, und

b) jede in dieser Fläche gezogene Linie heißt eine Horizontallinie.

c) Die Erde ist ein runder, kugelförmiger Körper.

d) Die Richtungen der Schwere stehen auf der Oberfläche eines stillstehenden Wassers senkrecht, und stossen verlängert im Mittelpunkte der Erde zusammen.

e) Eine Ebene, die durch die Richtung der Schwere gelegt wird, steht auf einer horizontalen Ebene senkrecht (I. §. 177.), und wird deßwegen eine Vertikalebene genannt.

I. Zusatz: Die Oberfläche eines stillstehenden Wassers ist horizontal, indem auf sie die Richtungen der Schwere senkrecht stehen.

II. Zusatz: Die Wasser- oder Horizontalfläche ist keine Ebene, sondern ein Theil der krummen Oberfläche oder Aussenseite des kugelförmigen Erdkörpers (§. 2. a.).

III. Zusatz: Die Richtungen der Schwere, welche durch gerade Linien gegen den Mittelpunkt der Erde dargestellt werden, sind nicht parallel, weil sie gegen

das Zentrum der Erde konvergiren (I. §. 37. a.), und verlängert in diesem zusammen stoßen.

IV. Zusatz: Horizontalebenen sind parallel, weil auf sie die Richtung der Schwere senkrecht ist (I. §. 179. Zus. I.).

Anmerkung: 1) Fäden oder Haare, an welchen schwere Körper frei herabhängen, stellen die Richtungen der Schwere anschaulich dar, und heissen Senkel oder Senkblei.

2) So wie kleine Bögen von Kreislinien mit sehr großen Halbmessern von ihren Sehnen nur unmerklich abweichen (I. §. 112. Zus. IV. und §. 113. Zus. IV.), so sind auch kleine Theile von der Oberfläche der Erde, deren Radius oder Halbmesser beinahe 860 deutsche oder geographische Meilen beträgt (I. §. 133. Anmerk. 1.), von einer Ebene sehr wenig unterschieden, welche mit dem krummen Flächenstücke die nämliche Begränzung hat.

Man nimmt daher eine Wasserfläche, deren Größe nicht über zwölf bis fünfzehen Quadratmeilen beträgt, als eine Ebene oder ebene Fläche an; deßhalb wird auch jede Ebene, auf welcher die Richtung der Schwere senkrecht ist, als eine horizontale oder wagrechte Ebene, und jede Linie in einer solchen Ebene als eine Horizontallinie angenommen.

3) Aus dem nämlichen Grunde lassen sich die Richtungen der Schwere, die nicht weit von einander entfernt und nicht sehr lang sind, als parallel annehmen, indem sie in dieser Voraussetzung nur unmerklich zu einander konvergiren.

4) Die bei c und d angeführten Sätze werden als Lehnsätze aufgeführt (Arithm. I. §. 8. Nro. 7.), weil man hier diese Sätze als wahr und bewiesen annimmt, um sie in der Folge benützen zu können.

5) Im gemeinen oder bürgerlichen Leben heißt man auch öfters das eben, was hier horizontal genannt wird; man sagt deßhalb z. B. ein Billard stehe eben, wenn es eine horizontale Lage hat.

§. 135.

Reduktion der Figuren auf eine horizontale Ebene.

Wenn man sich auf dem Felde (Fig. 40.) zwischen den Gegenständen oder Punkten A, B, C, D und E gerade Linien, mithin die geradlinigte Figur ABCDE vorstellt, und man annimmt, es sei durch den Anfangs-

punkt

punkt A eine horizontale Ebene Abcde gelegt, und es seien zugleich auf diese von allen Ecken der gegebenen Figur die senkrechten Linien Bb, Cc, Dd und Ee gezogen, so nennt man

a) Die Punkte b, c, d und e, in welchen die Perpendikel die Horizontalebene berühren, die auf den Horizont reduzirten Punkte, oder die Projektionen von B, C, D und E;

b) Die senkrechten Linien Bb, Cc, Dd und Ee sind die Höhen der Punkte B, C, D und E, da sie ihre Entfernungen von der durch A gelegten Horizontalebene angeben (I. §. 173. Zus. II.);

c) Die geraden Linien AB, BC, CD, DE und EA sind die wahren Entfernungen der anfangs gegebenen Figur, und Ab, bc, cd, de und eA die auf den Horizont reduzirten Entfernungen oder Weiten der Punkte B, C, D und E von einander;

d) Endlich heißt die Figur AbcdeA die auf den Horizont reduzirte Figur von ABCDEA, und die Figur, welche auf dem Papier gezeichnet, der auf den Horizont reduzirten Figur AbcdeA ähnlich ist (I. §. 90. Zus. I.), wird der Grundriß oder die topographische Karte von ersterer, und eine solche Figur αβγδε verzeichnen (Fig. 41.) heißt die horizontale Figur AbcdeA in Grund oder Grundriß legen.

§. 136.

Die praktische Geometrie, oder die Geodäsie oder Feldmeßkunst.

a) Die Meßkunst ist im weitesten Sinne des Wortes die Anleitung, die theoretischen Sätze der Geometrie und Trigonometrie auf die Messung verschiedener ausgedehnter Größen mittels gewisser dazu dienlicher Instrumente anzuwenden.

b) Beschäftigt sich die Meßkunst nur mit kleinen Ausdehnungen der Erdoberfläche, als mit Waldungen,

Wiesen, Aeckern, oder auch ganzen Fluren, so nennt man sie **Geodäsie** oder **Feldmeßkunst**.

c) Die Geodäsie oder die Meßkunst im engeren Sinne wird **ausübende Geometrie** oder **praktische Trigonometrie** genannt; in so ferne die Auflösungen ihrer Aufgaben Anwendungen der geometrischen Lehrsätze sind.

Anmerkung: 1) Bisher wurden in dem ersten und in dem gegenwärtigen Theile dieses Lehrbuches die Lehrsätze der Geometrie und Trigonometrie auch zur Auflösung einiger Aufgaben benützt; es kamen aber dabei nur der Zirkel, der Transporteur und das Lineal als Instrumente vor, um damit auf dem Papier gewisse Aufgaben zu lösen, und die Linien und Winkel, welche bei größeren Figuren vorkamen, wurden als schon gemessen und bekannt unter den gegebenen Stücken aufgeführt.

2) Die praktische Geometrie und Trigonometrie ist eigentlich eine Anwendung auf alles, was sich als eine ausgedehnte Größe (I. §. 1.) messen läßt.

Man könnte dieselbe eintheilen in die oberirdische, irdische und unterirdische angewandte Geometrie und Trigonometrie.

Befinden sich die Gegenstände der Messung **über der Erde**, somit an der inneren hohlen Himmelskugel, die wir von der Erde aus sehen, wird dieselbe **Astronomie** genannt.

Sind die Objekte der Messung **unterirdisch**, das ist, im Inneren der Erdkugel, so nennt man die praktische Geometrie und Trigonometrie die **Markscheidekunst** (Geometria subterranea).

Befaßt sich die Meßkunde mit **der ganzen Oberfläche der Erde** und den sich darauf befindlichen Punkten und Linien, oder mit namhaften Theilen derselben, so wird sie **die mathematische Geographie** genannt; letztere nennt man dann die **niedere Geodäsie** oder die **Feldmeßkunst**, wenn sie nur die kleineren ausgedehnten Größen der Erdoberfläche zum Gegenstande hat, und nur von dieser letzteren ist jetzt beim Vortrage der praktischen Geometrie und Trigonometrie die Rede.

3) Die praktische Geometrie und Trigonometrie lehrt die Entfernung zweier in der Natur gegebenen Punkte unter verschiedenen Umständen auszumessen, die Lage und Neigung mehrerer Linien zu einander und ihre Länge zu bestimmen, zu gewissen Stücken der Erdoberfläche eine ähnliche Figur in einem gegebenen Verhält-

nisse zu verzeichnen, und sowohl den Flächeninhalt des Ganzen und jedes einzelnen Theiles desselben richtig anzugeben, als auch bei Flächenstücken gewisse Vertheilungen oder Zerstückelungen vorzunehmen.

4) Weil sich die Geodäsie immer auf die Voraussetzung stützt, daß die Horizontalflächen Ebenen sind (§. 134. Anmerk. 2.), so können ihre Vermessungen nie in's Große gehen, und dadurch unterscheidet sich dieselbe von der mathematischen Geographie.

§. 137.

Die verschiedenen Beschäftigungen des Feldmessers.

a) Zuweilen verlangt man bloß zu wissen, wie weit auf einem gewissen Stücke der Erdoberfläche zwei gegebene Punkte von einander entfernt sind; diese Entfernungen bestimmen gerade Linien, welche die gegebenen Punkte zu ihren Endspunkten haben (I. §. 3. Zus. II.), und Messungen dieser Art nennt man Distanzen- oder Weiten-Messungen.

b) Die Höhenmessungen finden statt, wenn man die Höhe eines Gegenstandes, etwa eines Baumes, Gebäudes oder Berges bestimmt; solche Höhen sind allemal senkrechte Linien, die man sich von dem obersten Punkte oder von der Spitze dieser Gegenstände auf ihre horizontale Grundfläche gezogen vorstellt (I. §. 173. Zus. II.).

c) Manchmal wünscht man von einer Waldung, einer Flur, oder auch von einem einzelnen Grundstücke, und selbst von einer Linie, z. B. vom Rinnsaale eines Flusses, von der Richtung eines Weges ꝛc. nebst der Bestimmung der Größe auch ein ähnliches Bild im Kleinen auf dem Papier zu entwerfen; ein solches Bild ist dann eine Figur oder eine Linie, die den auf dem Felde sich befindlichen ähnlich ist (I. §. 90.), und man sagt, die Figur oder die Linie werde in Grund oder Grundriß gelegt, wenn man von ihr auf das Papier eine kleinere ähnliche Figur oder Linie verzeichnet oder aufträgt.

d) Bisweilen treten Fälle ein, daß man eine Flur, eine Waldung oder auch ein einzelnes Grundstück in mehrere gleiche, oder auch in ungleiche Theile nach ei-

nem bestimmten Verhältnisse theilen oder zerstückeln soll; man nennt diese Verrichtung die Vertheilung der Figuren.

e) Endlich ist auch manchmal zu bestimmen, um wie viel einer von zwei gegebenen Punkten der Erdoberfläche höher oder tiefer liegt, als der andere, und man nennt dieses das Niveliren.

Im ganzen Umfange des Wortes heißt Niveliren, die verschiedenen Abweichungen der Erhöhungen oder Vertiefungen der Erde, oder den Unterschied zwischen dem Halbmesser und der Entfernung eines Ortes vom Mittelpunkte der Erde, oder die Höhe oder Tiefe eines Ortes gegen den Meeresstand angeben.

Im engeren Sinne des Wortes versteht man unter Niveliren, die Abweichungen eines Terrains gegen einen in demselben bestimmten Punkt, gewöhnlich gegen den Wasserstand, angeben, das Gefälle eines Stromes bestimmen 2c.

Anmerkung: 1) In diesem Hauptstücke wird geometrisch die Bestimmung der Weiten, und die Messung der Flächen oder die Epipedometrie, und im nächsten Hauptstücke wird trigonometrisch die Bestimmung dieser ausgedehnten Größen nebst den Höhenmessungen gezeigt werden.

2) Man bestimmt in der praktischen Geometrie und Trigonometrie anstatt der wahren die auf den Horizont reduzirten Weiten und Flächen, weil dieses zum Auftragen der Linien und Flächen auf das Papier bequemer ist, und zugleich den Absichten bei Vermessungen hinlänglich entspricht.

II. Abschnitt.

Von dem verjüngten Maaßstabe und der Absteckung gerader Linien und geradlinigter Winkel nebst der Vermessung solcher Linien auf dem Felde.

---

§. 138.

I. Aufgabe, einen verjüngten Maaßstab oder eine Skala zu verfertigen.

Ein Maaßstab, welcher dient, auf dem Felde gemes-

sene oder andere größere Linien verhältnißmäßig auf dem Papier aufzutragen, dann Linien, welche darauf verzeichnet sind, zu messen, und größere Figuren in kleinere ähnliche zu verwandeln, heißt ein verjüngter Maaßstab oder eine Skala.

Derselbe wird auf folgende Weise verfertiget:

1) Man ziehe (Fig. 42.) die gerade Linie AB von beliebiger oder von jener Länge, welche die Skala nach einem gewissen Zwecke erhalten soll, und theile dieselbe in mehrere gleiche, etwa in sechs gleiche Theile, so daß AF = FH = HL = LT = TN = NB (I. §. 86.);

2) Durch die Punkte A, F, H, L, T, N und B errichte man Perpendikel von beliebiger, aber gleicher Länge (I. §. 32. und §. 45.), so daß AC = FE = HG = LK = ST = NM = BD;

3) Eine dieser senkrechten Linien, etwa AC, theile man in zehn gleiche Theile, bezeichne sie, wenn AC das oberste Perpendikel ist, mit den Numern 1, 2, 3, 4 2c., und ziehe durch alle Theilungspunkte Parallellinien mit AB (I. §. 39.);

4) Eben so theile man die anliegenden Linien AF und CE in zehn gleiche Theile, und numerire diese auf einer Seite mit 20, 40, 2c., auf der anderen hingegen mit 10, 30 2c.;

5) Endlich ziehe man vom Punkte F nach dem Theilungspunkte 10 eine gerade Linie, und ziehe mit dieser durch alle übrigen Theilungspunkte der Linien AF und CE Parallelen, und man hat einen verjüngten Maaßstab oder eine Skala verfertiget.

Beweis:

1) Man lasse die Abtheilung AF oder CF etwa 100 Fuß gelten, so ist nach Nro. 4.

Fg = E 10 = $\frac{1}{10}$ CE = $\frac{1}{10}$ AF = 10 Fuß,
und F 20 = $\frac{2}{10}$ AF = $\frac{2}{10}$ CE = 20 Fuß,
dann Fr = $\frac{3}{10}$ AF = $\frac{3}{10}$ CE = 30 Fuß, u. s. f.

2) Weil man mit AB Parallelen gezogen hat, so ist das Dreieck FE 10 mit den Dreiecken Fab, Fmn, Fpq 2c. ähnlich (I. §. 91.), und deßwegen verhält sich (I. §. 90. Zus. I.)

FE : Fb = E 10 : ab,
dann FE : Fn = E 10 : mn,
ferner FE : Fq = E 10 : pq, u. s. f.

Nun ist Fb = $\frac{1}{10}$ FE, also auch ab = $\frac{1}{10}$ E 10 = $\frac{1}{10} \times$ 10 Fuß = 1 Fuß, dann Fn = $\frac{3}{10}$ FE, also ist auch mn = $\frac{3}{10}$ E 10 = $\frac{3}{10} \times$ 10 Fuß = 3 Fuß, ferner ist Fq = $\frac{8}{10}$ FE, mithin ist auch pq = $\frac{8}{10}$ E 10 = $\frac{8}{10} \times$ 10 Fuß = 8 Fuß ꝛc.;

3) Trägt man (Fig. 40 und 41.) von einer auf den Horizont reduzirten Figur AbcdeA ihre Seiten nach diesem Maaßstabe so auf das Papier, daß Aβ eben so viele Theile hält, als Ab im gewöhnlichen Längenmaaße, verfährt man dann eben so bei allen übrigen Seiten, und macht man überdieß die Winkel der beiden Figuren der Ordnung nach einander gleich, so daß α = A, dann β = B ꝛc., so ist die kleine, auf dem Papier verzeichnete Figur αβγδεα der größeren Figur AbcdeA ähnlich (I. §. 90. Zus. 1.), und deßhalb der verzeichnete Maaßstab ein verjüngter Maaßstab.

Anmerkung: 1) Wenn man dem verjüngten Maaßstabe (Fig. 42.) zehn Theile gibt, wie die Linien AF und CE sind, so heißt man ihn einen tausendtheiligen verjüngten Maaßstab; hält dann ein solcher Theil 100 baierische Fuß, so beträgt die Länge desselben im verjüngten Maaße 1000 solche Fuß, dann die Theile Fg, g 20 ꝛc. betragen 10 Fuß, und die Theile ab, dann mn ꝛc. halten einen Fuß, dann 3 Schuh ꝛc.

2) Oefters geschieht es, daß man dem tausendtheiligen Maaßstabe die Länge eines ganzen oder halben baierischen Fußes, mithin einer Abtheilung (Fig. 42.), wie AF, CE ꝛc. die Länge eines ganzen oder halben baierischen Dezimalzolles gibt.

3) Wenn man auf die beim vorstehenden Beweise angezeigte Art die Figur durch das Auftragen der Seiten und Winkel in Grund legt, so setzt man voraus, daß alle Seiten und Winkel bekannt oder gegeben sind, welche zur Bestimmung einer Figur nöthig sind (I. §. 54.); die Seiten werden im gleichen Verhältnisse, somit im verjüngten Maaße durch die Skala, und die Winkel nach ihrer wahren Größe durch Hülfe des Transporteurs aufgetragen (I. §. 64. Anmerk. 1.).

4) Hat man bei einer Figur, welche nach der Triangulär-Methode durch Diagonalen in Dreiecke getheilt ist (I. §. 52. Zus. II. und Zus. VII.), alle Seiten und Diagonalen gemessen, so kann man dieselbe ohne Transporteur bloß mit der Skala, dem Zirkel und dem Lineal in Grund legen, indem man damit im verjüngten Maaße alle Seiten und Diagonalen auf das Papier aufträgt, und der Ordnung nach die ähnlichen Dreiecke verzeichnet (I. §. 19 und §. 100. Zus.).

Wenn man demnach bei der im I. Theile dieses Lehrbuches in der VI. Tabelle vorkommenden Figur 78. alle Seiten AB, BC, CD ꝛc. und von einem Ecke aus alle Diagonalen AC, AD ꝛc. nach einem bestimmten Längenmaaße weiß, und man der Ordnung nach auf dem Papier die ähnlichen Dreiecke abc, acd ꝛc. zeichnet, so wird die kleinere Figur abcdefga der größern ABCDEFGA ähnlich, und deßhalb der Grundriß dieser letzteren sein.

5) Die Größe des Planes oder Grundrisses, die man beim Auftragen einer Flur oder eines einzelnen Grundstückes beabsichtigt, bestimmt, wenn man nicht schon zum voraus nach einer gewißen Skala die Zeichnung vornehmen will, die Größe des verjüngten Maaßstabes, den man sich dazu verfertigen muß. Es ist deßhalb gut, wenn man Skalen von verschiedener Größe in Bereitschaft hat, um darnach Figuren von verschiedener Größe auftragen zu können.

6) Beim Verfertigen einer Skala läßt man die der Figur 42. zur Beweiseführung und zur Erläuterung angeführten Buchstaben A, F, C, E ꝛc. weg, und setzt nur zur Angabe der Eintheilungen die ausgesetzten Zahlen bei. Es ist auch nicht nothwendig, daß man die Linien AC, FE ꝛc. den Linien AF, CE ꝛc. gleich macht, wenn nur allemal die Linien AC, FE ꝛc. und eben so die Linien AF, CE ꝛc. unter sich gleich sind, und die Vierecke AE, FG ꝛc. immerhin Rechtecke sind (I. §. 50. b.).

7) Wie man mittels des verjüngten Maaßstabes gemessene Linien auf dem Papier auftragen, und auf demselben gezeichnete Linien messen kann, wird beim mündlichen Unterrichte gezeigt.

§. 139.

Die zur Absteckung gerader Linien und geradlinigter Winkel, und zur Vermessung der ersteren erforderlichen Instrumente.

Um gerade Linien oder vielmehr senkrechte Ebenen

und geradlinigte Winkel abzustecken, und gerade Linien auf dem Felde zu messen, braucht man folgende Instrumente:

a) Absteckstäbe, das ist, gerade fünf bis sechs Fuß lange, etwa einen Zoll dicke Stangen, die unten mit einer eisernen Spitze versehen sind;

b) Meßfahnen, ebenfalls gerade Stangen, die aber länger als die Absteckstäbe, und oben mit einer Fahne versehen sind;

c) Senkel (§. 134. Anmerk. 1.), um die Stäbe senkrecht auf den horizontalen Boden zu stecken;

d) Maaßstäbe, das ist, Stäbe oder Ebenen, auf welchen die in einem Lande üblichen Maaße, mithin in Baiern die Längen eines baierischen Fußes und Zolles, oder auch einer solchen Linie und Ruthe aufgetragen sind;

e) Eine oder ein Paar Meßketten von Eisen- oder Messingdraht, fünfzig oder hundert Fuß lang, so daß jedes Glied genau einen Schuh hält, und nach zehn Fuß immer gewisse Merkmale angebracht sind;

f) Zeichenstäbe, ungefähr acht Zoll lang, damit man durch sie Irrungen im Zählen vermeidet, und gewisse Punkte auf dem Felde bezeichnen kann.

Anmerkung: 1) Eine Schnur von Hanf ist wegen ihrer Dehnbarkeit zum Messen anstatt der Stäbe oder einer Meßkette nicht viel brauchbar; deßwegen werden auch mit einer solchen selten Messungen bei horizontalen Längen vorgenommen.

2) Die Meßketten von Eisen sind dauerhafter, als die von Messing; haben dieselben die Länge von 100 Schuh, so kann man wohl mit ihnen zugängliche horizontale Weiten schneller vermessen, als mit denen, welche 50 Schuh lang sind; es lassen sich aber jene auf einem unebenen Boden nicht so leicht in eine horizontale Richtung bringen, und ihre Glieder biegen oder überschlagen sich geschwinder.

3) Mündlich zeigt man, wenn man auf dem Felde Uebungen vornimmt und deßhalb die Instrumente vor sich hat, die Einrichtung und den Gebrauch derselben; aus diesem Grunde werden beim gegenwärtigen Vortrage die mathematischen Instrumente nicht abgezeichnet und beschrieben.

§. 140.

II. Aufgabe, einen Stab senkrecht auf einen horizontalen Boden zu setzen.

Auflösung:

1) Es stelle (Fig. 43.) das Viereck LM eine horizontale Ebene vor, und es sei im Punkte B auf sie ein Stab AB senkrecht zu setzen;

2) Man stecke an dem Punkte B den Stab AB in einer dem Auge senkrechten Richtung ein, halte vor ihn den Senkel mn (§. 134. Anmerk. 1.), und gebe dem Stabe eine solche Richtung, daß er sich in der Ebene mnB befindet, was sich durch das Visiren bewerkstelligen läßt;

3) Man halte den Senkel auf einer andern Seite bq, welche aber der vorigen nicht direkte entgegengesetzt ist, ebenfalls vor den Stab, und bringe diesen in die Ebene pqB;

4) Ist nun der Stab AB durch ähnliches wiederholtes Verfahren so auf den horizontalen Boden LM befestigt worden, daß er sich zugleich in den beiden Ebenen befindet, welche durch die Punkte m, n und B, und durch p, q und B gelegt werden, so steht er auf diesem Boden senkrecht.

Beweis:

1) Weil die Ebenen mnB und pqB durch die Richtungen der Schwere mittels des Senkels gelegt wurden, so stehen sie beide auf dem horizontalen Boden LM senkrecht (§. 134. e);

2) Der Stab liegt in diesen beiden Ebenen, ist also die gemeinschaftliche Durchschnittslinie dieser Ebenen, und steht als solche auf dem horizontalen Boden LM senkrecht (I. §. 178.).

Anmerkung: 1) Weil der Winkel CBD der Neigungswinkel (I. §. 178. Zus. I.) dieser beiden Vertikalebenen ist, so darf derselbe kein gerader Winkel sein (I. §. 7. Zus. I.), damit diese beiden Ebenen nicht in Eine Ebene zusammen fallen.

2) Soll man (Fig. 43.) von einem über der horizontalen Ebene LM gegebenen Punkte A eine senkrechte Linie auf diese Ebene errichten, so lasse man das Senkblei am Punkte A auf diese Ebene herabhängen, es gibt die Richtung der Schwere AB die verlangte senkrechte Linie (§. 134. a.)

3) Durch Uebung bringt man es nach und nach bald so weit, daß man auf dem Felde Stäbe ohne Senkel auf horizontale Ebenen ohne merkliche Abweichung senkrecht oder vertikal setzen kann.

§. 141.

III. Aufgabe, zwischen zwei Punkten auf dem Felde eine gerade Linie abzustecken, und zu messen, wenn man von dem einen derselben bis zu dem anderen ungehindert sehen und gehen kann.

Auflösung:

1) Es seien (Fig. 44.) die beiden Punkte A und B gegeben, und man setze, wenn in ihnen nicht schon senkrechte Gegenstände vorhanden sind, die Stäbe FA und NB auf den horizontalen Boden senkrecht (§. 140.);

2) Legt man durch die Punkte F, A und B eine Ebene, so liegt in ihr auch der Stab NB, welcher mit FA parallel ist, da diese beiden Stäbe auf der nämlichen Ebene senkrecht stehen (I. §. 172.);

3) Die Durchschnittslinie dieser Ebene mit dem Boden, oder die horizontale Linie AB ist die gerade Linie, die man abstecken, das ist, von welcher man durch ausgesteckte Stäbe mehrere Punkte zwischen A und B bestimmen will, um sie theilweise zu messen;

4) In einiger Entfernung von FA lasse man durch einen Gehilfen den Stab GC auf den Boden senkrecht so setzen, daß, wenn man vor dem Stabe FA nach NB visirt, diese beiden Stäbe sowohl, als auch der dritte neue Stab GC einander decken;

5) Der Stab GC liegt dadurch in der Ebene FABN, und der Punkt C ist in der geraden Linie AB (I. §. 177. Zus. II.);

6) Auf die nämliche Weise setzt man noch zwi-

schen A und B mehrere Stäbe, etwa HD und ME, es liegen dieselben ebenfalls in der Ebene FABN, und die Punkte D und E sind in der geraden Linie AB;

7) Nun messe man mit der Kette oder mit Stäben vom ersten Stabe FA zum zweiten GC die horizontale Linie ac, welche der Linie AC gleich ist (I. §. 41. Zus. IV.), indem die Stäbe FA und GC (I. §. 172. A.), und die horizontalen Linien ac und AC parallel sind (§. 134. Zus. IV.);

8) Auf die nämliche Weise bestimme man mit dem Längenmaaße die geraden horizontalen Linien cd = CD, dann de = DE und eb = EB, es gibt ihre Summe die verlangte Länge von AB, somit die Weite AB, da ac + cd + de + eb = AC + CD + DE + EB = ab = AB.

Anmerkung: 1) Wenn in der Folge von ausgesteckten Stäben die Rede ist, so ist immer die Voraussetzung, daß sie senkrecht auf den horizontalen Boden gesetzt werden.

2) Beim Messen gerader Linien mit der Meßkette muß vorzüglich darauf gesehen werden, daß die Kette immer gerade und horizontal gespannt, und keines ihrer Glieder verbogen oder überschlagen wird.

3) Will man eine gerade Linie in einer Ebene messen, welche auf einer horizontalen Ebene schief aufsteht, so ist dafür zu sorgen, daß die Stäbe oder die Meßkette immer in einer geraden Richtung ganz auf der Ebene aufliegen, und man auf diese Weise die Länge der schiefen geraden Linie bestimmt, welche mit der horizontalen zwischen den nämlichen Endspunkten liegenden geraden Linie nicht parallel ist.

4) Wenn man sich hinter einen ausgesteckten Stab stellt, dann nach den übrigen Stäben visirt, und jener diese letzteren deckt, so erkennt man daraus, daß diese sämmtlichen Stäbe in einer und derselben Vertikalebene sind.

§. 142.

IV. Aufgabe, zwischen zwei Punkten auf dem Felde eine gerade Linie oder vielmehr eine Vertikalebene abzustecken, wenn man von einem dritten Standpunkte aus zu den beiden Endspunkten visiren kann.

Auflösung:

1) Es sei (Fig. 45.) zwischen den beiden Punkten A und B, welche man durch vertikale Stäbe bezeichnet, eine gerade Linie abzustecken, und man könne von A nach B nicht sehen, wohl aber befinde sich zwischen A und B ein Hügel, von dem man nach A und B visiren kann;

2) Man setze auf den Hügel bei D einen Stab, der dem Augenmaaße nach mit den Stäben bei A und B in der nämlichen Vertikalebene liegt, und lasse durch Gehilfen zwischen A und D, und zwischen D und B, etwa bei C und E so Stäbe setzen, daß der erste bei C mit den bei A und D, und der andere bei E mit den bei D und B in die nämliche Ebene kömmt;

3) Findet man jetzt bei C oder E, daß sich die drei Stäbe bei C, D und E decken, und sie somit in der nämlichen Vertikalebene sind, so ist zwischen A und B die Vertikalebene abgesteckt;

4) Findet man aber, daß sich die drei Stäbe bei C, D und E nicht decken, und etwa der bei D links zu stehen kömmt, so nehme man ihn heraus, und setze ihn rechts, etwa bei d so, daß man vermuthen kann, er sei mit den Stäben bei A und B in einer Ebene; zugleich nehme man aber auch die Stäbe bei C und E heraus, und setze sie zwischen A und d, und zwischen d und B so, daß die Stäbe bei A, c und d in eine Ebene, und auch die Stäbe bei d, e und B in die nämliche Ebene zu stehen kommen;

5) Decken sich die Stäbe bei c, d und e, so hat man wieder zwischen A und B die verlangte Vertikalebene; decken sich aber dieselben nicht, so muß man dieses Verfahren so lange wiederholen, bis endlich die mittleren drei Stäbe bei m, n und p eine solche Lage haben, daß die Stäbe bei m, n und p, dann bei A, m und n, und bei n, p und B, mithin allemal drei für sich genommen, in der nämlichen Ebene liegen, so werden alle fünf Stäbe in der durch die Stäbe bei A und B gelegten Vertikalebene, und die auf den

Horizont reduzirten Punkte m, n und p in der geraden horizontalen Linie AB sein, das ist, man hat jetzt zwischen den Punkten A und B eine gerade Linie oder vielmehr eine Vertikalebene abgesteckt.

Beweis:

1) Setzt man an den beiden gegebenen Punkten *A* und *B* senkrechte Stäbe, so sind diese parallel (I. §. 172. *A*.), und deßhalb in der nämlichen Ebene (I. §. 37. a.);

2) Zwei Stäbe liegen allemal als Parallelen in der nämlichen Ebene (I. §. 37. b.), und durch sie ist die Lage dieser Ebenen vollkommen bestimmt (I. §. 168. b.);

3) Da nun die Stäbe bei *A*, m und n in der nämlichen Ebene sind, und der Stab bei p mit den Stäben bei m und n in einer Ebene ist, so liegen die Stäbe bei A, m, n und p in der nämlichen Ebene;

4) Eben so liegt der Stab bei B mit den Stäben bei n und p in einerlei Ebenen, weßhalb alle fünf Stäbe bei *A*, m, n, p und B in einer und derselben Vertikalebene, und die horizontalen Punkte m, n und p in der geraden horizontalen Linie *AB* sind.

Anmerkung: Wenn zwischen den beiden gegebenen Punkten kein solcher Platz vorhanden ist, daß man von demselben aus zugleich zu beiden sehen kann, so wird später gezeigt werden, wie man zwischen ihnen eine gerade Linie, oder vielmehr eine Vertikalebene abstecken kann. Es ist jenes bei Waldungen der Fall, wenn man zwischen zwei bestimmten Punkten eine gerade Linie, etwa die Richtung eines Weges, abstecken soll, und man weder von dem einen dieser Punkte zu dem anderen, noch von einem dritten Standpunkte aus zu den beiden Endspunkten der zu bestimmenden Linie zugleich visiren kann.

§. 143.

V. Aufgabe, auf dem Papier einen Winkel zu verzeichnen, der einem auf dem Felde abgesteckten Winkel gleich ist.

Auflösung:

1) Man stecke (Fig. 46.) am Punkte *A* den ge-

radlinigten Winkel *BAC* aus, indem man am Scheitelpunkte *A*, und in jedem der beiden Schenkel *AB* und *AC*, etwa bei *B* und *C*, senkrechte Stäbe setzt;

2) In den Schenkeln nehme man zwei beliebige Punkte E und F, und messe die geraden Linien AE, EF und FA (§. 141.);

3) Man nehme diese Linien mittels der Skala im verjüngten Maaße (§. 138.), und verzeichne aus ihnen auf dem Papier das Dreieck bac (I. §. 19.), es ist der Winkel bac = *BAC*.

Beweis:

1) Weil man die Seite ab, ac und bc im verjüngten Maaße eben so groß genommen hat, als die Linien AE, AF und EF nach dem gewöhnlichen Längenmaaße sind, so sind die Seiten des Dreieckes abc der Ordnung nach mit den Seiten des Dreieckes AEF proportionirt; das ist,

ab : *A*E = ac : *A*F,
dann ab : *A*E = bc : EF,
und ac : *A*F = bc : EF;

2) Da auf diese Weise die Dreiecke abc und AEF ähnlich sind (I. §. 94.), so ist der auf dem Papier verzeichnete Winkel bac dem Winkel BAC gleich (I. §. 90. Zus. I.);

Anmerkung: 1) Weil die Größe eines geradlinigten Winkels nicht durch die Länge seiner Schenkel, sondern nur durch ihre wechselseitige Neigung zu einander bestimmt ist (I. §. 7. Zus. II.), so kann man auf dem Papier mittels kleiner, im verjüngten Maaße aufgetragener Linien Winkel verzeichnen, die denen auf dem Felde sich befindlichen gleich sind.

2) Legt man durch die senkrechten Stäbe, durch welche ein Winkel ausgesteckt wird, zwei Ebenen, so stoßen diese in dem am Scheitelpunkte gesetzten Stabe zusammen, und der auf dem horizontalen Boden ausgesteckte geradlinigte Winkel bestimmt die Neigung der beiden Ebenen zu einander (I. §. 178. Zus. I.).

3) Lassen sich (Fig. 46.) die beiden Schenkel des Winkels auf dem Felde rückwärts verlängern, so kann man am Scheitelpunkte A einen Winkel DAG aufstecken, der dem Winkel BAC gleich ist, wenn man in der

Verlängerung von CA einen Stab bei D setzt, der mit den Stäben bei A und C in der nämlichen Ebene ist, und man eben so in der Verlängerung von BA bei G einen Stab setzt, der mit den Stäben bei A und B in der nämlichen Ebene ist, indem sich dann die geraden Linien DC und GB im Punkte G schneiden, und die dadurch entstandenen Scheitelwinkel BAC nnd DAG einander gleich sind (I. §. 10. Zus. II. und III.).

4) Auf eine ähnliche Weise, wie auf dem Papier mit Hilfe des Zirkels (I. §. 25.), kann man auch auf dem Felde einen Winkel ausstecken, der einem anderen gegebenen gleich ist, wenn man die Bögen mit Meßketten oder langen Stäben beschreibt.

§. 144.

VI. Aufgabe, auf dem Felde einen ausgesteckten geradlinigten Winkel zu halbiren.

Auflösung:

1) Es sei (Fig. 47.) der geradlinigte Winkel BAC auf dem Felde ausgesteckt, und man soll denselben durch eine dritte Linie in zwei gleiche Theile theilen (I. §. 7. Anmerk. 4.);

2) Man messe mit einem Längenmaaße die Schenkel AB und AC, und nehme auf ihnen von *A* aus gleiche Theile, das ist, man bestimme durch Messung, daß AB der Linie AC gleich wird, und bezeichne die Punkte B und C mit Stäben;

3) Nun messe man die Linie BC, und trage ihre Hälfte auf, indem man an ihrem Mittelpunkte D einen Stab setzt, die auf diese Weise ausgesteckte gerade Linie AD halbirt den Winkel BAC.

Beweis:

1) Weil man die Linie BA der Linie AC gleich gemacht hat, so ist das Dreieck BAC gleichschenklicht (I. §. 18. b.);

2) In diesem ist CD = BD, da CD = ½ BC = BD, weßhalb die Linie AD den Winkel BAC halbirt (I. §. 36.)

Anmerkung: 1) Auf eine ähnliche Weise, wie man im I.

Theile im §. 26. einen gegebenen Winkel auf dem Papier halbirte, könnte man auch auf dem Felde (Fig. 47.) den Winkel BAC halbiren, indem man mit langen Stäben, oder auch mit Meßketten von den Punkten B und C aus auf der inneren Seite des Winkels Bögen beschreiben würde.

2) Wie man auf dem Felde gerade Linien in mehrere gleiche, und in ungleiche Theile nach einem bestimmten Verhältnisse theilen kann, ist aus den Auflösungen ersichtlich, welche im I. Theile dieses Lehrbuches in den §§. 86 und 87. vorkommen.

§. 145.

VII. Aufgabe, durch einen gegebenen Punkt einer geraden Linie auf sie ein Perpendikel auf dem Felde zu errichten.

I. Auflösung:

1) Es sei (Fig. 48.) auf die gerade Linie AB vom Punkte C aus ein Perpendikel zu errichten;

2) Man spanne längs der Linie AB am Punkte D eine Kette oder Schnur aus, und nehme auf ihr von D aus zwei gleiche Theile, so daß $DE = DF$;

3) Aus den Punkten E und F beschreibe man mit einer Latte, oder mit einem Stücke der Meßkette von einer Länge, die größer ist, als die Hälfte von EF, Bögen, bis sie sich schneiden, und stecke am Durchschnittspunkte C einen Stab, es ist die Linie DC das verlangte Perpendikel (I. §. 32.), welches man beliebig verlängern kann.

II. Auflösung:

1) Man spanne (Fig. 49.) am Punkte C in der Richtung von AB eine Schnur oder Meßkette aus, dann nehme man von einer anderen Meßkette drei Abtheilungen Dm, Dn und mn von einer solchen Länge, daß $mn^2 = Dm^2 + Dn^2$, und verbinde sie zu einem Dreiecke Dmn, so ist dieses rechtwinklicht (I. §. 97. Zus. I.);

2) Man lege das Dreieck Dmn am Punkte D mit dem einen Perpendikel Dn an die Linie AB, so

ist

ist mD auf AB senkrecht, und in der Richtung von mD kann man in beliebiger Entfernung bei C ebenfalls einen Stab setzen, es wird CD auf AB senkrecht sein, weil der Winkel mDn oder CDB ein rechter Winkel ist (I. §. 9. Zus. IV.).

Zusatz: Setzt man (Fig. 49.) die Linie mn = 50, dann Dm = 40, und Dn = 30 Schuh, so ist $mn^2 = Dm^2 + Dn^2$, da man $50^2 = 40^2 + 30^2 = 2500$, und man erhält auf die angezeigte Weise auf die Linie AB von D aus ein Perpendikel.

§. 146.

VIII. Aufgabe, am Endspunkte einer geraden Linie auf dem Felde ein Perpendikel zu errichten.

Auflösung:

1) Es sei (Fig. 50.) am Endspunkte A der Linie AB ein Perpendikel zu errichten;

2) Man nehme von A aus auf AB eine beliebige gerade Linie AC, und errichte darüber mit langen Stäben oder mit Meßketten ein gleichschenklichtes Dreieck ADC (I. §. 19.);

3) Man verlängere am Punkte D die Linie CD, und mache die Verlängerung DE = DC;

4) Steckt man nun bei E einen Stab ein, so ist AE das verlangte Perpendikel (I. §. 45.)

Anmerkung: Es läßt sich (Fig. 50.) eine gerade Linie CD auf dem Felde am Punkte D verlängern, wenn man einen Stab bei E so setzt, daß er, wenn man von E nach D und C, oder von C nach D und E visirt, von den Stäben bei D und C gedeckt wird, und sich somit diese drei Stäbe in der nämlichen Ebene befinden.

§. 147.

IX. Aufgabe, zu einer gegebenen Linie CD auf dem Felde eine Parallellinie zu ziehen.

I. Auflösung:

1) Wenn (Fig. 51.) zu AB eine Parallele zu

ziehen ist, so errichte man auf der nämlichen Seite von AB durch zwei beliebige Punkte (§. 145.), oder an den beiden Endspunkten derselben *A* und *B* zwei Perpendikel in der nämlichen Ebene (§. 146.);

2) Diesen beiden Perpendikeln gebe man eine gleiche Länge, entweder beliebig oder nach der gegebenen Entfernung, welche die Parallelen haben sollen, und bezeichne die Endspunkte D und C der gleichen Perpendikel AD und BC mit Stäben, es ist die ausgesteckte gerade Linie DC mit AB parallel, weil AD ≙ BC, und deßhalb auch AB ≙ DC (I. §. 48. Zus. VIII.).

II. Auflösung:

1) Wenn man (Fig. 52.) zu AB eine beliebige Parallele ziehen soll, so setze man in einer beliebigen Entfernung von AB einen Stab in E, und einen anderen in der Verlängerung von AE bei D, wenn man die Parallele auf der Seite von E errichten will;

2) Man messe mit einem Längenmaaße die Linien AE, EB und ED, suche zu diesen drei Linien die vierte geometrische Proportionallinie EC (I. §. 88. Auflös. II.), trage diese am Punkte E als eine Verlängerung von BE auf, und bezeichne den Punkt C mit einem Stabe, es ist die gerade Linie CD zu AB die verlangte Parallele, indem die Scheitelwinkel bei E und e einander gleich sind (I. §. 10. Zus. II. und III.), und sich verhält AE : EB = ED : EC; weßhalb △ AEB∽ △ CED (I. §. 93.), und der Winkel A = D, gleichwie B = C, das ist, die Linie CD ist mit AB parallel (I. §. 38.).

Anmerkung: Wenn man (Fig. 52.) auf AB eine beliebige gerade Linie CB zieht, dann einen Winkel DCB verzeichnet, der dem Winkel ABC gleich ist (§. 143. Anmerk. 4.) so erhält man ebenfalls eine Linie CD, die mit AB parallel ist (I. §. 39.)

§. 148.

X. **Aufgabe**, durch einen bestimmten Punkt mit einer gegebenen geraden Linie eine Parallele zu ziehen.

Auflösung:

1) Es sei (*Fig.* 52.) durch den Punkt C mit AB eine Parallele zu ziehen;

2) Man setze zwischen C und B einen beliebigen Stab bei E, welcher mit den Stäben bei C und B in der nämlichen Vertikalebene ist, und messe die drei Linien AE, E*B* und EC;

3) Zu diesen Linien suche man die vierte geometrische Proportionallinie (I. §. 88. Auflös. II.), und trage die gefundene Linie ED am Punkte E als eine Verlängerung von AE auf, es ist wieder aus den im vorigen §. angeführten Gründen die Linie CD zu A*B* die verlangte Parallele.

Anmerkung: Um schnell auf dem Felde zu gewissen Linien Perpendikel und Parallellinien abzustecken, dient das Winkelkreuz und das Winkelrohr. Bei diesen beiden Instrumenten ist die Anrichtung, daß man, während man sie nach einer abgesteckten geraden Linie stellt, man zugleich auch andere Linien visiren und bestimmen kann, welche auf derselben senkrecht stehen; deßwegen kann man durch sie auf einer Ebene, bei der man zu allen Ecken von einer angenommenen Standlinie aus sehen und messen kann, auf diese letztere Perpendikel fällen oder abstecken, die dann alle unter sich parallel sind (I. §. 38. Zus. I. und II.).

III. Abschnitt.

Von der Messung unzugänglicher Weiten mit bloßen Meßketten.

---

§. 149.

I. **Aufgabe**, eine unzugängliche Weite zu finden, wenn man zu ihren beiden Endspunkten kommen kann.

Auflösung:

1) Es sei (*Fig.* 53.) die unzugängliche Weite

AB zu finden, und man könne von einem Punkte C zu ihren Endspunkten A und B ungehindert messen;

2) Man messe die Linie CA, und trage sie rückwärts in ihrer Verlängerung auf, und man messe die Linie CB, und trage sie ebenfalls rückwärts in ihrer Verlängerung auf, so daß CA = CE, und CB = CD;

3) Man setze bei D und E Stäbe, es wird der Stab bei D mit den Stäben bei C und B, und der Stab bei E mit den Stäben bei C und A in der nämlichen Vertikalebene sein, weil CE die Verlängerung von AC, und CD die Verlängerung von BC ist;

3) Man messe die Linie DE, und man hat auch AB gefunden, indem CD = CB, dann CE = CA, und der Winkel DCE = ACB (I. §. 10. Zus. II. und III.), folglich △ DCE ≌ △ ACB (I. §. 20.), und die Linie DE ist der gesuchten Weite AB gleich (I. §. 18. Zus. IV.).

I. Zusatz: Wenn (*Fig.* 53.) zur Verlängerung der Linien AC und BC kein schicklicher Platz vorhanden ist, so trage man von C aus auf AC einen bestimmten Theil dieser Linie, und eben so auf CB den nämlichen Theil von der Linie CB auf, und messe die Linie pq; ist $Cp = \frac{1}{m}$ CA, so ist auch $Cq = \frac{1}{m}$ CB, und es verhält sich

$$Cp : \frac{1}{m} CA = Cq : \frac{1}{m} CB,$$

und $Cp : CA = Cq : CB$ (Arithm. IV. §. 41.), weßhalb, da der Winkel pCq = ACB, das Dreieck pCq dem Dreiecke ACB ähnlich ist (I. §. 93.), und es verhält sich (I. §. 90. Zus. I.)

$$pC : CA = pq : AB,$$

wie auch $Cq : CB = pq : AB$,

folglich ist wie $Cp = \frac{1}{m}$ CA und $Cq = \frac{1}{m}$ CB, auch $pq = \frac{1}{m}$ AB, und $m \times pq = AB$; das

ist, wann man pq mißt, und mit m multiplizirt, so erhält man AB.

Das Nämliche gilt, wenn man die Linien CA und CB nur zum Theile verlängern kann; ist nämlich cf $= \frac{1}{m}$CB, und cg $= \frac{1}{m}$CA, so ist wegen der gleichen Scheitelwinkel C und c das Dreieck fcg dem Dreiecke ACB ähnlich (I. §. 93.), und fg $= \frac{1}{m}$AB, gleichwie cf $= \frac{1}{m}$CB, und Cg $= \frac{1}{m}$AC, weßhalb m $\times$ fg $=$ AB.

II. Zusatz: Wenn man (Fig. 54.) von A nach *B* ungehindert sehen kann, aber ein dazwischen liegender Morast oder Teich die unmittelbare Vermessung hindert, so stecke man die Linien in einer größeren Länge aus, errichte an den Punkten C und D auf A*B* solche zwei gleich lange Perpendikel CE und DF (§. 145 und 146.), daß man von E nach F ungehindert messen kann; es ist EF $=$ CD, da CE $\#$ DF (I. §. 48. Zus. VIII.), und deßhalb AC $+$ EF $+$ BD $=$ AC $+$ CD $+$ DB $=$ A*B*. Mißt man nun die Linien AC, EF und DB, so gibt ihre Summe die gesuchte Weite AB.

§. 151.

II. Aufgabe, eine unzugängliche Weite zu finden, wenn man nur zu einem ihrer Endspunkte kommen kann.

Auflösung:

1) Es sei (Fig. 55.) die unzugängliche Weite AB zu finden, und man könne zum Endspunkte B kommen, und zugleich lasse sich in der Verlängerung von AB bei D ein Stab setzen, bei dem man sieht, daß er mit den Stäben bei B und A in der nämlichen Vertikalebene ist;

2) Man nehme den beliebigen Punkt C an, von dem man zu B und D ungehindert messen kann, messe CB und CD, und trage diese Linien am Punkte C in ihren Verlängerungen rückwärts auf, so daß CE = CD und CF = CB;

3) In der Verlängerung von EF setze man einen Stab bei G so, daß er mit den Stäben bei C und A in der nämlichen Ebene ist, und messe die Linie FG, es ist diese der gesuchten Weite AB gleich.

Beweis:

1) Weil BC = CF, dann CD = CE, und die Scheitelwinkel BCD und ECF einander gleich sind, so ist △ BCD ≌ △ ECF (I. §. 20.), und der Winkel m = n, weßhalb BD ⋕ EF, oder AD ⋕ EG (I. §. 38.).

2) Da AD mit EG parallel ist, so ist der Winkel A = G (I. §. 41.), ferner ist nach Nro. 1. die Linie CF = CB, und der Winkel ACB = FCG (I. §. 10. Zus. II. und III), weßhalb △ ACB ≌ △ FCG, und FG = AB.

Zusatz: Wenn (Fig. 56.) zur Verlängerung von AB kein schicklicher Platz vorhanden ist, und man von einem Standpunkte C zu *B* kommen kann, so messe man BC, und verlängere diese Linie so, daß CD = CB; dann stecke man am Punkte D einen Winkel CDE ab (§. 143. Anmerk. 4.), welcher dem Winkel ABC gleich ist, und setze in dem Schenkel DE so einen Stab bei E, daß er mit den Stäben bei C und A in die nämliche Ebene kömmt, und CE in der Verlängerung von AC ist. Mißt man jetzt die Linie DE, so ist sie die gesuchte Weite von AB, indem DC = CB, dann D = *B*, DCE = ACB, weßhalb △ DCE ≌ △ ACB (I. §. 22.), und DE = AB.

Anmerkung: Mißt man (Fig. 56.) die Linie CE, so ist sie in den kongruenten Dreiecken DCE und ACB der Linie CA gleich, und gibt deßwegen an, wie weit der Standpunkt C vom Gegenstande bei A entfernt ist.

§. 151.

III. Aufgabe, eine Weite zu bestimmen, wenn man zu keinem ihrer Endspunkte hinkommen kann.

Auflösung:

1) Es sei (Fig. 57.) die unzugängliche Weite AB zu finden, und von einer angenommenen Standlinie DE aus könne man zu ihren beiden Endspunkten visiren;

2) Man setze an den Endspunkten und in der Mitte dieser Standlinie Stäbe, somit bei D, C und E;

3) In der Linie AD setze man in einer beliebigen Entfernung von D einen Stab bei *F*, und in einer beliebigen Entfernung von E in der Linie EB einen Stab bei G;

4) Die Linie GC verlängere man am Punkte C, und mache CH = CG, und die Linie *FC* verlängere man eben so, und mache CJ = *CF*;

5) Man bezeichne die Punkte bei H und J mit Stäben, und setze in der Verlängerung von DH einen Stab bei K, der mit den Stäben bei C und B in der nämlichen Vertikalebene ist;

6) Endlich setze man in der Verlängerung von EJ einen Stab bei L, der mit den Stäben bei *C* und A in der nämlichen Ebene ist.

Mißt man jetzt die Linie KL, so ist diese der Linie AB gleich, und man hat die gesuchte Weite gefunden.

Beweis:

1) Da nach der Konstruktion die Linie *CD* = *CE*, dann *CF* = *CJ*, und *CH* = *CG*, wie auch der Winkel m = q, und p = n, so ist △ D*CF* ≌ △ *C*EJ, und △ HD*C* ≌ △ *C*GE (I. §. 20.), weßhalb der Winkel r = ſ, und q = t;

2) Die Linie *CD* ist = *CE*, und r = ſ, und der Winkel D*C*K ist = BCE, ferner ist *CD* = *CE*, dann q = t, und der Winkel D*C*A = LCE, weß-

halb $\triangle DCK \cong \triangle CBE$, und $\triangle ADC \cong \triangle LCE$ (I. §. 22.), folglich ist $KC = CB$, und $LC = CA$;

3) Weil überdieß der Winkel $KCL = ACB$ (I. §. 10. Zus. II. und III.), so ist $\triangle KCL \cong \triangle ACB$, und $KL = AB$.

I. Zusatz: Mittels Auftragung oder Absteckung gleicher Winkel kann man (Fig. 58.) die unzugängliche Weite AB von einer Standlinie DE aus, von der man nach A und B sehen kann, ebenfalls finden.

Man steckt nämlich an den Endspunkten und in der Mitte der Standlinie ED Stäbe, macht den Winkel q dem Winkel m, und den Winkel n dem Winkel p gleich, setzt in dem Schenkel DF einen Stab bei F, der mit den Stäben bei C und B, und in dem Schenkel EG einen Stab, der mit den Stäben bei C und A in der nämlichen Vertikalebene ist, und mißt die Linie FG, die dann der gesuchten Weite AB gleich ist.

In diesem Falle ist $DC = CE$, dann $m = q$, und $t = u$, also $\triangle GCE \cong \triangle DCA$, und $CG = CA$; ferner ist $DC = CE$, dann $n = p$, und $r = s$, also $\triangle FDC \cong \triangle CBE$, und $FC = CB$.

Weil nun $CF = CB$, dann $CG = CA$, und $FCG = ACB$, so ist $\triangle FCG \cong \triangle ACB$, und $FG = AB$; wird nun FG gemessen, so weiß man auch die gesuchte Weite AB.

II. Zusatz: Ist (Fig. 59.) zur Verlängerung der Weite AB ein schicklicher Platz vorhanden, so stecke man in C einen Stab, der mit den Stäben oder vertikalen Gegenständen bei A und B in der nämlichen Ebene ist, errichte da auf AC ein Perpendikel CG (§. 145.), und in einem Punkte F desselben darauf das Perpendikel FD, und setze in diesem bei E einen Stab, der mit den Stäben bei B und G, und in D einen Stab, der mit den Stäben bei A und G in der nämlichen Vertikalebene ist.

Da $FD \# CA$ (I. §. 38. Zus. I.), so verhält sich (I. §. 81 und 82.)

$$GE : GB = DE : AB,$$
und $GE : GB = GF : GC$,
also $GF : GC = DE : AB$,
und $AB = \frac{GC \times DE}{GF}$.

Mißt man nun die Linien GF, GC und DE, so findet man nach vorstehender Formel die verlangte Weite AB.

III. Zusatz: Durch den verjüngten Maaßstab kann man eine unzugängliche Weite ebenfalls finden, wenn man (Fig. 60.) eine beliebige Standlinie DE annimmt, von der man zu A und B sehen kann, und bei ihr die Endspunkte D und E und einen dazwischen liegenden Punkt C mit Stäben bezeichnet; man steckt dann in der Verlängerung von AD einen Stab bei F, der mit den Stäben bei C und B, und in der Verlängerung von BE bei G einen Stab, der mit den Stäben bei C und A in der nämlichen Vertikalebene ist, und mißt die Linien DC, CE, EG, GF, FC und CG, durch dieselben sind die Dreiecke DCF, FCG und GCE bestimmt (I. §. 24. Zus.), und durch diese sind es die Dreiecke GFA und FGB, da FG beiden Dreiecken gemein ist, und die Winkel m und n den Winkel AFG, dann die Winkel p und q den Winkel FGB bestimmen (I. §. 22. Zus.), und deßhalb auch die Seiten FA, FB, GA und GB bestimmt sind.

Trägt man mittels der Skala auf dem Papier (Fig. 61.) die Dreiecke FDC, FCG und GCE so auf, daß die beiden ersten Dreiecke fdc und fcg die Seite fc, und die beiden andern fcg und gce die Seite gc gemein haben, so sind diese letztern Dreiecke mit jenen der Ordnung nach ähnlich (I. §. 94.), und daraus folgt, daß afb und AFB, wie auch agb und AGB ähnlich sind (I. §. 93.).

Mißt man mittels des Zirkels die Linie ab auf der Skala, so gibt diese die gesuchte Weite AB an, das ist, sie ist im verjüngten Maaße eben so groß wie AB, gleichwie fg im verjüngten Maaße der gemessenen Linie FG gleich ist, indem sich wegen Aehnlichkeit der Dreiecke verhält:

$fg : FG = af : AF,$
und $af : AF = ab : AB,$
also $fg : FG = ab : AB$ (Arithm. IV. §. 43);
wie nun fg im verjüngten Maaße $= FG$, eben so ist auch $ab = AB$.

Anmerkung: 1) Bei der Auflösung der bisherigen Aufgaben ist die Voraussetzung, daß man von den angenommenen Standpunkten und Standlinien aus immerhin zu den Endspunkten der gesuchten Weiten hinsehen oder visiren kann.

2) Die Bestimmung der unzugänglichen Weite nach dem vorstehenden III. Zusatze ist nicht so genau, als es die vorausgehenden Bestimmungen sind, weil bei der ersteren keine Linie auf dem Felde gemessen wird, die der gesuchten Weite gleich ist, und diese letztere nur auf dem verjüngten Maaßstabe bestimmt wird.

IV. Abschnitt.

Von der Messung unzugänglicher Weiten mit dem Meßtische.

---

§. 152.

Benennung der erforderlichen Instrumente.

Bei dem Vermessen mit dem Meßtische sind nebst den im §. 139. angeführten Instrumenten noch folgende nothwendig:

a) **Der Meßtisch** selbst (Mensula praetoriana), um damit unmittelbar Winkel auf dem Papier aufzutragen, die den auf dem Felde ausgesteckten gleich sind, und Linien zu verzeichnen, die mit den darauf vorkommenden proportionirt sind;

b) Ein **Diopterlineal** oder ein mit einem Lineal **bewegliches Fernrohr**, um damit auf dem Meßtische zu Gegenständen und ausgesteckten Stäben visiren, und auf demselben die Visirlinien ziehen zu können;

c) Eine **Setzwage** oder **Wasserwage**, um

damit dem Meßtische eine horizontale Lage geben zu können;

d) Endlich verjüngte Maaßstäbe, Handzirkel und gute Bleistifte, um auf dem Meßtische Linien abzustechen, und zu messen, und auf demselben die auf dem Felde gemessenen Linien aufzutragen.

Anmerkung: 1) Die Erfindung des Meßtisches wird dem Joh. Prätorius, der als Professor der Mathematik im Jahre 1616 in Altdorf starb, zugeschrieben; von ihm erhielt er die Benennung „Mensula praetoriana."

2) Beim Meßtische muß die Platte oder das Reißbrett eine ebene Fläche sein (I. §. 4. a.), und leicht in eine horizontale Lage gebracht, und in dieser nach Belieben umher gedreht werden können, damit man an ihm größere und kleinere Wendungen vornehmen kann; hat er aber einmal eine bestimmte Stellung, so muß er unverrückt in dieser fest bleiben.

3) Will man auf dem Meßtische die Weltgegenden kenntlich machen, und sie gleich bei der Aufnahme oder Vermessung anzeigen, so braucht man noch nebst den genannten Instrumenten die Magnetnadel.

4) Zum Abstechen und Auftragen größerer Linien auf dem Meßtische dient der sogenannte Stangenzirkel, bei welchem an einem geraden Stabe einer der beiden Füße beweglich ist, um ihnen eine beliebige Entfernung von einander geben zu können; beim gewöhnlichen Handzirkel sind dagegen die beiden Füße oder Schenkel am Scheitelpunkte beweglich, um ihm eine größere oder kleinere Oeffnung geben zu können.

5) In einigen mathematischen Werken, besonders in den älteren, findet man die mathematischen Instrumente abgezeichnet, und ausführlich beschrieben. Ich begnüge mich, dieselben beim gegenwärtigen Vortrage der angewandten Geometrie und Trigonometrie nur namentlich aufzuführen, und kurz auf ihren Gebrauch hinzuweisen, indem eine vollständige Einsicht von der Einrichtung und dem Gebrauche dieser Instrumente aus dem mündlichen Unterrichte, und aus eigenen Lehrbüchern der praktischen Geometrie geschöpft werden muß. Hierzu ist T. Mayers gründlicher und ausführlicher Unterricht zur praktischen Geometrie sehr zu empfehlen. Die Beschreibung und Abzeichnung der mathematischen Instrumente, die man in J. Spenglers Geometrie und Trigonometrie findet, leistet ebenfalls gute Dienste. Er gab diese Schrift als öffentlicher Lehrer der Mathematik im Jahre 1776 an der damaligen hohen Schule

zu Dilingen bei Leonhard Brönner heraus; in ihr findet man die Instrumente deutlich beschrieben, welche zur Auflösung gewisser Aufgaben auf dem Papier, und auf dem Felde nöthig sind.

§. 153.

I. Aufgabe, einen auf dem Felde abgesteckten Winkel auf dem Meßtische aufzutragen.

Auflösung:

1) Es sei (Fig. 62.) auf dem Felde der horizontale Winkel BAC ausgesteckt;

2) Man bestimme sich auf dem Meßtische einen Punkt a zum Scheitelpunkte, und setze dessen Platte LP so über A, daß a senkrecht über A zu stehen kömmt, und die Linie aA vertikal ist;

3) Hat man den Meßtisch horizontal gestellt, so setze man das Fernrohr, oder das Diopterlineal so darauf, daß man den Stab bei C sieht, und ziehe auf dem Meßtische die Visirlinie ac;

4) Man lasse den Meßtisch unbeweglich stehen, und drehe das Fernrohr oder Diopterlineal, bis man den Stab bei B sieht, und ziehe die Visirlinie ab; es ist der Winkel cab der verlangte, auf dem Meßtische verzeichnete Winkel, welcher dem auf dem Felde ausgesteckten Winkel CAB gleich ist.

Weil der Meßtisch horizontal gestellt wird, so ist dessen Platte oder die Ebene LP mit der horizontalen Ebene parallel, in welcher der Winkel CAB ist (§. 134. Zus. IV.); diese zwei Parallelebenen werden durch die Ebenen AE und AD geschnitten (I. §. 179. Zus. IV.), und aE oder ab ⧺ AB, wie auch aD oder ac ⧺ AC (I. §. 179. Zus. II.), weßhalb der auf dem Meßtische verzeichnete Winkel cab dem auf dem Felde abgesteckten Winkel CAB gleich ist (I. §. 176.).

Anmerkung: 1) Wenn man den Senkel oder das Senkblei an eine sogenannte Gabel hängt, so kann man damit ohne Schwierigkeit den Meßtisch so setzen, daß ein auf ihm angenommener Punkt senkrecht über einem auf dem Felde bestimmten Punkte zu stehen kömmt; wie dieses zu bewerkstelligen, und wie überhaupt die

angeführten Instrumente zu gebrauchen sind, muß durch mündlichen Unterricht bei den wirklichen Uebungen auf dem Felde gezeigt werden.

2) Linien, die auf dem Meßtische mittels des Fernrohrs oder Diopterlineals gezogen werden, heissen Visirlinien, und Winkel, deren Schenkel in einer Horizontalebene liegen, werden Horizontalwinkel genannt.

§. 154.

II. Aufgabe, eine unzugängliche Weite zu finden, wenn man von einem Standpunkte aus zu ihren beiden Endspunkten sehen und messen kann.

Auflösung:

1) Es sei (Fig. 63.) die unzugängliche Weite AB zu finden, und man könne vom Standpunkte C zu A und B visiren und messen;

2) Man stecke die geraden Linien CA und CB aus und messe sie;

3) Nun bringe man den Meßtisch über C, und trage den Winkel ACB auf (§. 153.), das ist, man verzeichne auf ihm einen Winkel mCn, der dem auf dem Felde abgesteckten gleich ist;

4) Man trage die gemessenen Linien CA und CB mittels einer Skala auf den Visirlinien cm und cn auf, das ist, man mache im verjüngten Maaße ca = CA und cb = CB, und man ziehe die Linie ab;

5) Endlich messe man auf der Skala die Linie ab, es ist diese im verjüngten Maaße so groß, wie die gesuchte Weite AB; indem der Winkel acb = ACB, und sich verhält ca : CA = cb : CB, weßhalb △ acb ∽ △ ACB (I. §. 93.), und ac : AC = ab : AB; wie nun im verjüngten Maaße ca = CA, eben so ist auch ab = AB.

§. 155.

III. Aufgabe, eine unzugängliche Weite zu finden, wenn man zu einem ihrer Endspunkte

von einem angenommenen Standpunkte aus hinmessen kann.

Auflösung:

1) Es sei (Fig. 64.) die unzugängliche Weite AB zu finden und man könne von einem Standpunkte C sowohl nach A und B visiren, als auch nach A messen;

2) Man stelle den Meßtisch über A, und trage den Winkel BAC auf, indem man auf dem Meßtische die Visirlinien Am und An zieht, und den Winkel mAn dem Winkel BAC gleich macht (§. 153.);

3) Man nehme den Meßtisch weg, messe die Linie AC, und trage sie mittels der Skala auf An auf (§. 138.), so daß im verjüngten Maaße ac = AC ist;

4) Ueber den Punkt C bringe man den Meßtisch so, daß der Punkt c senkrecht über C, und ca längs CA zu stehen kömmt, und ziehe die Visirlinie cg, es wird diese die Visirlinie am in einem Punkte b schneiden;

5) Man messe auf dem verjüngten Maaßstabe die Linie ab, und es ist diese die verlangte Weite von AB; indem der Winkel bac = BAC, und acb = ACB, und deßhalb △ acb ∽ △ ACB (I. §. 92. Zus.); gleichwie nun im verjüngten Maaße die Linie ac = AC, eben so ist auch in diesem Maaße ab = AB, da wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke sich verhält (I. §. 90. Zus. I.)

$$ac : AC = ab : AB.$$

Zusatz: Kann man (Fig. 65.) bei der Bestimmung der unzugänglichen Weite AB von einem Standpunkte C wieder nach A messen, und soll man dieselbe mit dem Meßtische von diesem einzigen Standpunkte aus finden, so stecke man in einer beliebigen Entfernung von C einen Stab bei D, und zwischen B und D in der Vertikalebene dieser Stäbe einen Stab E so, daß man von C nach D und E messen kann.

Man stelle den Meßtisch über C, und trage an einem auf ihm bestimmten Punkte c den ausgesteckten Winkel ACD auf, und ziehe nebst den Visirlinien $c\alpha$ und $c\delta$ auch die Linien $c\beta$ und $c\varepsilon$, indem man

von C, vielmehr von c aus nach den bei A, B, E und D ausgesteckten Stäben visirt, und so auf dem Meßtische die Winkel $\alpha c\beta$, $\beta c\varepsilon$ und $\varepsilon c\delta$ aufträgt, die der Ordnung nach den auf dem Felde ausgesteckten Winkeln ACB, BCE und ECD gleich sind (§. 153.).

Nun nehme man den Meßtisch weg, messe auf dem Felde die Linien CA, CE und CD, und trage sie mit der Skala auf den entsprechenden Visirlinien $c\alpha$, $c\varepsilon$ und $c\delta$ auf, so daß im verjüngten Maaße ca = CA, dann ce = CE und cd = CD.

Verbindet man jetzt die Durchschnittspunkte d und e mit einer geraden Linie de, verlängert man diese, bis sie die Visirlinie in einem Punkte b schneidet, und zieht man die Linie ab, so gibt diese, auf dem verjüngten Maaßstabe gemessen, die verlangte Weite AB.

Der Grund des Verfahrens liegt in der Aehnlichkeit der Dreiecke. Es ist nämlich der Winkel ecd = ECD, und im verjüngten Maaße cd = CD und ce = CE, also △ ecd ∽ △ ECD (I. §. 93.), weßhalb der Winkel cde = CDE; ferner ist der Winkel bcd = BCD, mithin △ bcd ∽ △ BCD (I. §. 92. Zus.), und im verjüngten Maaße ist cb = CB; da nun eben so ca = CA, und der Winkel acb = ACB, so ist △ acb ∽ △ ACB, und im verjüngten Maaße ist ab = AB, indem wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke (I. §. 90. Zus. I.)

cd : CD = cb : CB,

und cb : CB = ab : AB,

folglich cd : CD = ab : AB (Arithm. IV. §. 43.); das ist, wie im verjüngten Maaße die Linie cd = CD, eben so ist auch in diesem Maaße ab = AB.

§. 156.

IV. **Aufgabe**, eine unzugängliche Weite zu finden, wenn man zu keinem ihrer Endspunkte kommen kann.

Auflösung:

1) Es sei (Fig. 66.) die unzugängliche Weite AB

zu finden, wenn man von einer Standlinie aus zu ihren beiden Endspunkten sehen, aber nicht messen kann;

2) Man stelle den Meßtisch über C, visire darauf von dem über C vertikalstehenden Punkte c nach *A*, *B* und D, und ziehe die Visirlinien $c\alpha$, $c\beta$ und $c\delta$;

3) Man nehme den Meßtisch weg, messe die Linie CD, und trage sie mittels der Skala auf $c\delta$ auf, indem man im verjüngten Maaße die Linie cd der Standlinie CD gleich macht;

4) Man bringe den Meßtisch über D, und stelle ihn so, daß der Punkt d senkrecht über D, und die Linie dc mit der Linie DC parallel in die nämliche vertikale Ebene zu stehen kömmt, man visire dann nach *A* und *B*, und ziehe die Visirlinien dm und dn, diese schneiden die vorigen Visirlinien $c\alpha$ und $c\beta$ in den Punkten a und b, zieht man nun die Linie ab, so ist diese im verjüngten Maaße der gesuchten Weite *AB* gleich, und gibt, mit der Skala gemessen, diese letztere an.

Weil der Winkel acd = ACD, und cda = CDA, dann der Winkel bcd = BCD, und cdb = CDB, so ist △ acd ∽ △ ACD, und bcd ∽ BCD (I. §. 92.), weßhalb im verjüngten Maaße ca = CA, und cb = CB; da nun auch der Winkel acb = ACB, so ist △ acb ∽ △ ACB (I. §. 93.), und im verjüngten Maaße ist ab = AB, indem wegen der Aehnlichkeit der genannten Dreiecke sich verhält

cd : CD = ac : AC,
und ac : AC = ab : AB,
also cd : CD = ab : AB;

das ist, wie im verjüngten Maaße cd = CD, eben so ist auch ab = AB.

Zusatz: Ist (Fig. 67.) die unzugängliche Weite AB von einem einzigen Standpunkte C aus zu finden, und kann zu ihren Endspunkten nicht messen, wohl aber zu ihnen sehen, so stecke man in einer beliebigen Entfernung bei D einen Stab, und zwischen B und D, wie auch zwischen *A* und D Stäbe, von welchen der eine bei F mit den Stäben bei D und B, und der andere

andere bei E mit den Stäben bei A und D so in der nämlichen Vertikalebene ist, daß man nicht nur von C nach D, sondern auch von C nach E und F messen kann.

Man stelle den Meßtisch über C, und trage auf ihm am Punkte c die Winkel ACE, ACB, ACF und ACD auf, indem man die Visirlinien $c\alpha$, $c\varepsilon$, $c\beta$, $c\varphi$ und $c\delta$ zieht (§. 152.);

Man nehme den Meßtisch von C weg, messe die Linien CD, CF und CE, und trage diese mit der Skala auf, so daß im verjüngten Maaße cd = CD, cf = CF und ce = CE; zieht man von d nach f, und von d nach e die geraden Linien df und de, und verlängert man sie, so schneidet erstere die Visirlinie $c\beta$ im Punkte b, und letztere die Linie $c\alpha$ im Punkte a; zieht man endlich die Linie ab, und mißt man diese im verjüngten Maaße, so gibt sie die verlangte Weite AB.

Es ist nämlich der Winkel fcd = FCD, und im verjüngten Maaße cd = CD und cf = CF, also ist △ fcd ∽ △ FCD, und der Winkel cdf oder cdb = CDF oder CDB, dann ist der Winkel bcd = BCD, also ist △ bcd ∽ △ BCD (I. §. 92. Zus.), und im verjüngten Maaße cb = CB; ferner ist der Winkel ecd = ECD, und im verjüngten Maaße cd = CD, und ce = CE, also ist △ ecd ∽ △ ECD (I. §. 93.), und der Winkel cde = CDE; da überdieß acd = ACD, so ist △ acd ∽ △ ACD, und im verjüngten Maaße ist ca = CA.

Weil nun der Winkel acb = ACB, und im verjüngten Maaße cd = CD, und ac = AC, so ist △ acd ∽ △ ACD (I. §. 93.), und im verjüngten Maaße ab = AB, indem wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke sich verhält

cd : CD = cb : CB,
und cb : CB = ab : AB,
also cd : CD = ab : AB;

das ist, wie im verjüngten Maaße die Linie cd = CD, eben so ist auch ab = AB.

Anmerkung: 1) Weil die Winkel allein ein Dreieck nicht

bestimmen (§. 61. Anmerk. 1.), so muß man, wenn man mit dem Meßtische unzugängliche Weiten finden will, wenigstens eine Dreiecksseite auf dem Felde messen und sie im verjüngten Maaße auf demselben auftragen.

2) Mit dem so genannten Distanzenmesser gibt man gleich unmittelbar die Größe der gesuchten Weiten oder Distanzen mit gehöriger Genauigkeit nach einem gewissen Längenmaaße an, ohne dieselben auf die gewöhnliche Weise zu messen, was die Arbeit, besonders bei unzugänglichen Weiten, sehr erleichtert und abkürzt; wie es z. B. der Fall ist, wenn man mit diesem Instrumente die Breite eines Flusses bestimmt.

V. Abschnitt.

Von dem Verfahren, Figuren und überhaupt gebrochene Linien mit bloßen Stäben und Meßketten, oder auch mit dem Winkelkreuz oder Winkelrohr in Grund zu legen, und von den erstern den Flächeninhalt anzugeben.

---

§. 157.

I. Aufgabe, eine geradlinigte Figur, bei der man von einem Ecke aus die möglichen Diagonalen messen kann, mit bloßen Stäben und Meßketten in Grund zu legen, und den Flächeninhalt derselben anzugeben.

Auflösung:

1) Es soll (Fig. 68.) die geradlinigte ebene Figur ABCDE in Grund gelegt, und ihr Flächeninhalt bestimmt werden;

2) Man bezeichne die Ecke der Figur mit Stäben, und stecke auf diese Weise dieselbe aus, und man mache sich auf dem Papier eine Figur, die dem bloßen Ansehen nach der auf dem Felde ausgesteckten ähnlich ist; die vorläufig dem Augenmaaße nach gezeichnete Figur nennt man Brouillon;

3) Man messe alle Seiten der Figur, und von einem Ecke aus, etwa von A, alle möglichen Diagonalen, und schreibe die Größe der gemessenen Linien im Brouillon auf;

4) Man verzeichne (Fig. 69.) im verjüngten Maaße aus den gemessenen Linien AB, BC und AC auf dem Papier das Dreieck abc, dann über ac aus den Linien ac, cd und ad das Dreieck acd, und über ad aus den Linien ad, de und ae das Dreieck aed (I. §. 19.), und es ist die nach einer bestimmten Skala verzeichnete Figur abcde der verlangte Grundriß;

5) Nimmt man im Grundrisse die Diagonalen ac und ad als Grundlinien der Dreiecke an, und mißt man auf der Skala die Höhen bm, cn und ep (I. §. 18. f.), so kann man den Flächeninhalt der einzelnen Dreiecke abc, acd und ade berechnen (I. §. 156.), und ihre Summe gibt den verlangten Flächeninhalt der ganzen Figur (I. §. 158. Auflös. I.).

Beweis:

1) Weil man die gemessenen Linien der Ordnung nach mit dem verjüngten Maaßstabe aufträgt, so sind mit ihnen die auf dem Papier verzeichneten Linien proportionirt, und die Dreiecke abc, acd und ade sind den Dreiecken ABC, ACD und ADE ähnlich (I. §. 94.);

2) Weil überdieß jedes Dreieck mit dem folgenden im verjüngten Maaße eine der gemessenen Diagonallinien gemein hat, so haben beide Figuren gleich viel Seiten, die der Ordnung nach einander proportionirt sind, und alle Winkel der Ordnung nach sind einander gleich, weßhalb man auf dem Papier mit der Skala eine Figur gezeichnet hat, die der auf dem Felde ausgesteckten ähnlich ist (I. §. 90. Zus. I.), das ist abcde ∽ ABCDE (I. §. 100. Zus.), und der Flächeninhalt der gezeichneten Figur abcde ist im verjüngten Maaße eben so groß, als der Flächeninhalt der abgesteckten Figur ABCDE im gewöhnlichen Flächenmaaße.

Anmerkung: Genauer, als durch das Abmessen der gezeichneten Höhe mit dem verjüngten Maaßstabe, erhält

man den Flächeninhalt der Figur, wenn man trigonometrisch den Flächeninhalt eines jeden Dreieckes aus den bekannten drei Seiten nach der im §. 122. angegebenen Vorschrift berechnet.

§. 158.

II. Aufgabe, eine geradlinigte Figur in Grund zu legen, und ihren Flächeninhalt zu bestimmen, wenn man sie bloß umgehen, und ihre Winkel durch Verlängerung der Schenkel rückwärts auftragen kann.

Auflösung:

1) Es sei (Fig. 70.) das Viereck ABCD so beschaffen, daß man innerhalb desselben keine Vermessung vornehmen, wohl aber durch Verlängerung der Schenkel dessen Winkel rückwärts abstecken kann;

2) Man messe alle Seiten, und stecke in den Verlängerungen von BA und DA Stäbe, so daß der Winkel fAg = BAD (I. §. 10. Zus. II. und III.);

3) Man messe die drei Linien fA, Ag und fg, und bemerke sich ihre Größe ebenfalls;

4) Aus diesen drei Linien zeichne man sich auf dem Papier mit dem verjüngten Maaßstabe ein Dreieck (I. §. 19.), das dem auf dem Felde ausgesteckten Dreiecke ähnlich ist (I. §. 94.), und trage im verjüngten Maaße in den Verlängerungen von f*A* und g*A* die gemessenen Seiten *A*B und *A*D auf, durch sie und den Winkel f*A*g = B*A*D ist das Dreieck B*A*D bestimmt (I. §. 20. Zus.), deßwegen ist es auch die Seite BD, und aus BD, und den gemessenen Seiten BC und CD erhält man ein zweites Dreieck über BD, das dem auf dem Felde ausgesteckten Dreiecke ähnlich (I. §. 94.).

5) Man erhält auf diese Weise ein Viereck, das dem auf dem Felde ausgesteckten ähnlich ist (I. §. 100. Zus.), und die Figur ist auf diese Weise in Grund gelegt;

6) Zieht man endlich im Grundrisse eine Diagonallinie, und auf diese von den zwei gegenüberstehen-

den Ecken Perpendikel als die Höhen der Dreiecke, so kann man aus diesen drei Linien den Flächeninhalt der beiden Dreiecke (I. §. 156.), und daher auch den Flächeninhalt der ganzen Figur finden (I. §. 158. Auflös. I.)

Anmerkung: 1) Bezeichnet man (Fig. 70.) die mit dem verjüngten Maaßstabe bestimmten Linien BD, Am und An mit den Buchstaben B, A und a, so ist $\triangle$ BAD $= \frac{1}{2}BD \times Am = \frac{1}{2}B . A$, und $\triangle$ BCD $= \frac{1}{2}BD \times Cn = \frac{1}{2}B . a$, also $\square$ AC $= \frac{1}{2}B . A + \frac{1}{2}B . a = \frac{1}{2}B \times (A + a)$, das ist, man erhält den Flächeninhalt des Viereckes, wenn man die halbe Diagonallinie, welche die gemeinschaftliche Basis beider Dreiecke ist, mit der Summe der beiden Höhen multiplizirt.

2) Genauer, als durch das Abmessen der Linien auf dem verjüngten Maaßstabe, erhält man den Flächeninhalt dieser Figur, wenn man trigonometrisch im Dreiecke fAg aus den drei gemessenen Seiten den Winkel fAg berechnet (§. 122.), welcher dem Viereckswinkel BAD gleich ist; aus den Seiten BA und AD, und dem eingeschlossenen Winkel A kann man dann die Diagonal BD und den Flächeninhalt des Dreieckes BAD finden (§. 121.), und endlich aus den Seiten BD, BC und CD den Flächeninhalt des Dreieckes BCD berechnen (§. 122.).

3) Hat man trigonometrisch aus den Linien fA, Ag und fg den Winkel fAg oder BAD, das ist, den Viereckswinkel A berechnet, so kann man nach den Lehrsätzen der Polygonometrie, welche nach den trigonometrischen Lehrsätzen die Auflösung der Vielecke zeigt, und deßhalb eine Erweiterung der Trigonometrie ist, geschwinder aus einem Winkel und den vier Seiten eines Viereckes den Flächeninhalt bestimmen, als es auf die so eben in der vorstehenden zweiten Anmerkung angezeigten Weise geschieht.

4) Weil eine geradlinigte ebene Figur oder ein Vieleck vollkommen bestimmt ist, wenn außer zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, dann außer einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln, und außer drei Winkeln alle übrigen Seiten und Winkel, oder wenn alle Seiten und Diagonalen bekannt sind (I. §. 54.), so ist es zureichend, wenn man auf dem Felde alle Seiten und Diagonalen, oder außer zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, dann außer einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln alle Seiten und Winkel mißt; indem dann auch die übri-

gen, auf dem Felde nicht gemessenen Stücke bestimmt sind (I. §. 6. Zus.), und sich dann die Figur nach den geometrischen, und nach den trigonometrischen und polygonometrischen Lehrsätzen zeichnen oder in Grund legen, und berechnen läßt. Aus diesem Grunde war (Fig. 70.) das Viereck ABCD durch alle vier Seiten und den Winkel A schon bestimmt, und konnte aus diesen gegebenen Stücken in Grund gelegt und berechnet werden, da sich aus ihnen beim Auftragen der Figur auf das Papier die drei unbekannten Winkel B, C und D von selbst ergaben.

Mißt man bei einem Vielecke auf dem Felde mehr Stücke, als zur Bestimmung der Figur erfordert werden (I. §. 54.), so dienen die überflüßig gemessenen Stücke zur Berichtigung und Probe der vorgenommenen Auflösungen.

5) Ist (Fig. 70.) in der Figur selbst noch an einem Ecke, etwa bei A, ein solcher Platz vorhanden, daß man von p nach q messen kann, so ist die Verlängerung der Seiten überflüssig, und man kann auf die angezeigte Weise aus den gemessenen Linien Ap, Aq und pq den Winkel pAq, somit den Viereckswinkel BAD oder A bestimmen.

§. 159.

III. Aufgabe, eine krummlinigte Figur in Grund zu legen, und ihren Flächeninhalt zu finden.

Auflösung:

1) Es sei (Fig. 71.) die krummlinigte Figur ABCD in Grund zu legen und zu berechnen, und man könne innerhalb ihrer Gränzen keine Vermessungen vornehmen;

2) Man umschließe sie mit einer geradlinigten Figur, etwa durch das Viereck EFGH, und bestimme dieses auf die im vorigen §. angezeigte Art, und bezeichne die Punkte der krummen Gränze, welche von den Seiten des Viereckes merklich abweichen;

3) Man betrachte jede Vierecksseite als eine Basis oder Abszissen-Linie, fälle auf sie von den an der Gränze der Figur ausgesteckten Stäben Perpendikel, und messe sowohl diese, als auch auf den Abszissen- oder Standlinien von den angenommenen Anfangs-

punkten an die entsprechenden Abszissen (I. §. 147. Anmerk. 2.);

4) Man lege auf dem Papier das Viereck EFGH in Grund, trage im verjüngten Maaße auf jeder Viereckseite die gemessenen Abszissen und Ordinaten auf, und verbinde die Endspunkte der letzteren durch Linien mit freier Hand, es geben diese zusammen die Gränze der krummlinigten Figur ABCD, die auf diese Weise in Grund gelegt ist;

5) Zur Bestimmung des Flächeninhaltes berechne man sowohl den Flächeninhalt des Viereckes, als auch aller außerhalb der krummlinigten Figur vorkommenden Trapeze und Dreiecke, ziehe diese letzteren von der Fläche des Viereckes ab, und man hat den verlangten Flächeninhalt der krummlinigten Figur (I. §. 158. Anmerk. 3.).

Zusatz: Wenn man (Fig. 72.) innerhalb der krummlinigten Figur Vermessungen vornehmen kann, so nimmt man innerhalb ihrer Gränze eine geradlinigte Figur und ihre Seiten als Abszissenlinien an, errichtet auf sie von allen merklich abweichenden Punkten der krummen Gränzlinie Ordinaten, und verfährt auf die vorige Weise, um die Figur in Grund zu legen. Bei der Bestimmung des Flächeninhaltes werden dann zur Dreiecksfläche ABC die zwischen den Dreiecksseiten AC, CE und AE, und der krummen Gränzlinie in der Gestalt der Trapeze und Dreiecke vorkommenden Flächenstücke addirt, um den Flächeninhalt der ganzen krummlinigten Figur ABCDEFG zu finden.

Anmerkung: 1) Wenn die Entfernungen der Krümmungspunkte von den Abszissenlinien nicht groß sind, so kann man auf die letzteren entweder dadurch Perpendikel fällen, daß man sich auf die bereits angegebene Weise (Fig. 49.) aus Meßketten oder Stäben ein rechtwinklichtes Dreieck Dmn (I. §. 97. Zus. I.) bildet, und mit diesem die Punkte angibt, in welchen die Perpendikel die Abszissenlinie berühren, oder auch dadurch, daß man mit Ketten oder langen Stäben von den Krümmungspunkten aus gleichschenklichte Dreiecke bestimmt, die jene Punkte zur Spitze, und Theile der Abszissenlinien zu Grundlinien haben; mißt man diese

letzteren, und halbirt man sie, so erhält man ebenfalls die verlangten Perpendikel, indem man auf diese Weise in den gleichschenklichten Dreiecken von der Spitze aus die Grundlinien halbirt (I. §. 36.). Sind aber die Krümmungspunkte oder die Ecke einer Figur von den Abszissenlinien zu weit entfernt, als daß man mit Meßketten oder Stäben solche gleichschenklichte Dreiecke abstecken kann, so muß man die Perpendikel mittels des Winkelkreuzes oder Winkelrohrs bestimmen; man erhält mit diesen Instrumenten die Ordinaten oder Perpendikel geschwinder und sicherer, als durch blosse Stäbe und Meßketten.

2) Man fällt bei krummlinigten Figuren so viele Ordinaten, damit man die zwischen ihnen liegenden Theile der krummen Gränzlinie ohne merklichen Fehler als gerade Linien, und die durch sie, und die Abszissen und Ordinaten begränzten Flächenstücke als Dreiecke und Trapeze betrachten kann (I. §. 13. a. u. §. 48. b.).

Weil man diese Flächenstücke in rechtwinklichte Dreiecke theilen oder zerfällen kann, bei welchen durch die auf dem Felde vorgenommenen Vermessungen zwei Perpendikel bekannt sind, so wird durch dieselben die Lage aller in der Gränzlinie bezeichneten Punkte, und dadurch die Gränze der krummlinigten Figur selbst bestimmt (I. §. 20. Zus.).

§. 160.

IV. Aufgabe, eine krumme Linie eines Feldes, etwa die Beugungen eines Flusses oder Weges in Grund zu legen.

Auflösung:

1) Es sei (Fig. 73.) die krumme Linie ABCDE in Grund zu legen;

2) Man nehme eine beliebige Basis oder Abszissenlinie FG so an, daß man auf sie von der krummen Linie Perpendikel messen kann, und diese letzteren nicht sehr groß werden;

3) Die Punkte der krummen Linie, welche von der Basis merklich abweichen, bezeichne man mit Stäben, fälle von ihnen auf die Abszissenlinie mit dem Winkelkreuz oder Winkelrohr die Ordinaten, und messe sowohl diese, als auch vom Anfangspunkte F aus die entsprechenden Abszissen;

4) Man trage mit dem verjüngten Maaßstabe auf dem Papier der Ordnung nach auf eine gezogene gerade Linie Fg vom Punkte F an die gemessenen Abszissen und Ordinaten auf, und verbinde die Endspunkte der letzteren durch Linien, es bilden diese zusammen eine krumme Linie, welche der auf dem Felde ausgesteckten um so ähnlicher wird, je mehrere Punkte derselben durch Abszissen und Ordinaten bestimmt wurden (I. §. 90.).

Anmerkung: Nimmt man bei einer krummen, oder geradgebrochenen Linie eine Abszissenlinie an, welche dieselbe ein- oder mehrmal schneidet, so erhalten die Ordinaten nicht immer die nämliche Richtung. Bezeichnet man nun die Ordinaten, welche auf einer Seite liegen, mit dem Zeichen (+), so zeigt man die der andern Seite, welche eine entgegengesetzte Lage haben, mit dem Zeichen (—) an. Berührt die angenommene Abszissenlinie den Anfangspunkt der aufzunehmenden Linie, so ist für den ersten Punkt die Abszisse und die Ordinate = o. Trägt man endlich die gebrochene oder krumme Linie von der linken zur rechten Seite auf, und muß man am Anfangspunkte links die Basis zum Abstecken der Ordinaten verlängern, so bezeichnet man die rechts liegenden Abszissen mit (+), und die links vorkommenden mit (—).

§. 161.

V. Aufgabe, eine geradlinigte Figur mit dem Winkelkreuz oder Winkelrohr in Grund zu legen, und ihren Flächeninhalt zu finden.

Auflösung:

1) Es sei (Fig. 74.) die geradlinigte Figur ABCDEFG in Grund zu legen, und zu berechnen;

2) Man nehme eine beliebige gerade Linie, etwa die größte Seite AG als Basis an, und verlängere sie an ihren beiden Enden;

3) Mit dem Winkelkreuz oder Winkelrohr fälle man von allen Ecken der Figur auf die Basis die Ordinaten Bb, Cc, Dd, Ee und Ff, und messe so-

wohl diese als auch vom Anfangspunkte A aus die Abszissen Ab, Ac, Ad, Ae, Af, und AG;

3) Weil die Abszisse Ab zu den übrigen eine entgegengesetzte Lage hat, so bezeichne man sie mit (—), jene aber und alle Ordinaten mit (+), da sie alle auf der nämlichen Seite von AG liegen;

4) Man ziehe auf dem Papier eine beliebige gerade Linie, und bestimme sich auf ihr zur linken Seite einen Anfangspunkt a; von diesem Punkte aus trage man mit dem verjüngten Maaßstabe die negative Abszisse Ab rückwärts auf, und errichte am Punkte b im verjüngten Maaße das Perpendikel bB, es wird dadurch die Lage des Punktes B bestimmt;

5) Nun trage man im verjüngten Maaßstabe von a aus gegen die rechte Seite hin die übrigen Abszissen Ac, Ad, Ae, Af und AG, und errichte eben so an ihren Endspunkten die Perpendikel cC, dD, eE und fF; für den Anfangspunkt A ist die Abszisse und Ordinate = o, und für den letzten Punkt G der als Basis angenommenen Seite ist die Ordinate ebenfalls = o, und die Abszisse diese nämliche Seite AG;

6) Die Endspunkte jeder zwei beisammen stehenden Ordinaten verbinde man mit geraden Linien, und man erhält die Seite des Vieleckes, nämlich AB, BC, CD, DE, EF, FG und AG, das ist, man hat auf diese Weise das Polygon ABCDEFG in Grund gelegt.

7) Weil auf diese Weise das Polygon in lauter Trapeze getheilt wird (I. §. 147.), so berechne man den Flächeninhalt eines jeden Trapezes (I. §. 158. Auflös. II.), es gibt ihre Summe den Flächeninhalt der ganzen Figur, wenn man vom ersten Tapez bBCc und dem letzten eEFf die Dreiecke ABb und GFf subtrahirt, welche nicht zur Fläche des Vieleckes gehören.

1. Zusatz: Durch die Lage und Größe aller Abszissen und Ordinaten ist die Lage und Größe einer geradlinigten Figur, oder einer gebrochenen Linie überhaupt vollkommen bestimmt; indem man durch die Abszissen und Ordinaten Tapeze erhält, bei welchen allemal zwei rechte Winkel, und als Seiten zwei Ordinaten und ihre Entfernung als ein Theil der Abszis-

senlinie vorkommen, und dadurch diese Vierecke ganz bestimmt sind (I. §. 47. b.). Kommen am Ende und am Anfange der Figur Dreiecke vor, so sind diese durch ihre beiden Perpendikel bestimmt (I. §. 20. Zus.); dieselben kann man auch als Trapeze betrachten, bei welchen die eine Parallele = o ist.

II. Zusatz: Nimmt man eine gerade Linie innerhalb der Figur als Abszissenlinie an, so haben die Ordinaten zur linken Seite mit denen zur rechten eine entgegengesetzte Lage; bezeichnet man die ersteren mit (+), so zeigt man die letzteren mit (—) an, um sie gehörig nach ihren verschiedenen Richtungen auf dem Papier bei der Verfertigung des Grundrisses aufzutragen.

Anmerkung: 1) Hat man das Vieleck auf die angezeigte Weise in Trapeze getheilt (I. §. 147), und vom angenommenen Anfangspunkte aus alle Abszissen und Ordinaten gemessen, so gibt die im I. Theile dieses Lehrbuches nach der in der VIII. Tabelle vorkommenden Figur 114. im §. 158. aufgestellte Formel die Regeln an, nach welchen man durch eine einzige Berechnung den Flächeninhalt der ganzen Figur auf einmal finden kann.

2) Werden auf diese Art Figuren nach Abszissen und Ordinaten auf dem Felde gemessen, dann auf dem Papier aufgetragen und berechnet, so nennt man das Verfahren die Perpendikulär-Methode, die auch Parallelmethode genannt wird, indem alle Ordinaten als Perpendikel in der nämlichen Ebene auf die Basis senkrecht stehen (I. §. 38. Zus. II.).

3) Die Perpendikulär- oder Parallel-Methode ist da, wo sie sich anwenden läßt, z. B., bei Aeckern, Wiesen rc., die man ungehindert durchgehen kann, sehr vortheilhaft, indem sich die Abszissen und Ordinaten durch die genannten einfachen Instrumente leicht und sicher auf dem Felde bestimmen, und im verjüngten Maaße auf dem Papier zur Bildung der Figur auftragen lassen, und alle erforderlichen Linien auf dem Felde zur Berechnung des Flächeninhaltes, welche tabellarisch in einer bestimmten Ordnung geschehen kann, gemessen werden.

4) Weil durch alle Abszissen und Ordinaten die Figur vollkommen bestimmt ist (Zus. I.), so könnte man trigonometrisch aus denselben alle Seiten und Winkel berechnen, welche durch das Auftragen der Figur gezeichnet werden, gleichwie man umgekehrt in der Poly-

gonometrie die Formeln aufstellt, nach welchen aus den gemessenen Seiten und Winkeln nach einer gewissen Basis für alle Ecke der Figur die Abszissen und Ordinaten berechnet werden können, um darnach die Figur in Grund zu legen, und ihren Flächeninhalt zu berechnen. Dieselbe schließt sich auch, wenn man sie mittels der Abszissen und Ordinaten aufträgt, viel sicherer, als wenn man sie nach der Größe der gemessenen Seiten und Winkel verzeichnet.

5) Unter den Schriften, welche über die Perpendikulärmethode oder die Art, mit rechten Winkeln aufzunehmen, erschienen sind, und sowohl ihre Vortheile ausführlich darstellen, als auch die Zeichnung der erforderlichen Instrumente und die Anweisung zu ihrem Gebrauche enthalten, verdienen die Werke des Herrn Barons Philipp von Reichlin, und des Herrn Pfarrers Xaver Angerer besonders empfohlen zu werden; das erstere erschien in der Stage'schen Buchhandlung zu Leipzig, und das letztere gab Herr Angerer, der als Pfarrer zu Tafertshofen starb, und sich auch sehr durch seine vorzüglichen astronomischen Kenntnisse auszeichnete, als Professor der Mathematik an der ehemaligen Universität zu Dilingen bei L. Brönner heraus.

VI. Abschnitt.

Von dem Verfahren, mit dem Meßtische Figuren auf dem Felde aufzunehmen, und ihren Flächeninhalt zu finden.

§. 162.

I. Aufgabe, ein Feld in Grund zu legen, und seinen Flächeninhalt zu bestimmen, wenn man von einem innerhalb liegenden Punkte nach allen Ecken visiren und messen kann.

Auflösung:

1) Man soll (Fig. 75.) die Figur ABCDE in Grund legen und ihren Flächeninhalt bestimmen, wenn

man vom Punkte F nach allen Ecken visiren und messen kann;

2) Man messe von F zu allen Ecken der Figur, somit die Linien FA, FB, FC, FD und FE, und bemerke ihre Länge;

3) Nun bringe man den Meßtisch über F, und bestimme darauf den Punkt f, der senkrecht über F stehen muß;

4) Von f ziehe man nach allen Ecken Visirlinien, und trage mit der Skala die entsprechenden, auf dem Felde gemessenen Linien auf, so daß im verjüngten Maaße fa = FA, fb = FB, fc = FC, fd = FD und fe = FE;

5) Die Punkte a, b, c, d und e verbinde man durch die geraden Linien ab, bc, cd, de und ea, und man hat die Figur ABCDE in Grund gelegt;

6) Man suche endlich den Flächeninhalt des Grundrisses abcde (I. §. 158.), es ist dieser im verjüngten Maaße eben so groß, als der Flächeninhalt des Feldes im gewöhnlichen Flächenmaaße.

Beweis:

1) Die Dreiecke afb, bfc ꝛc. sind der Ordnung nach den Dreiecken AFB, BFC ꝛc. ähnlich, weil bei ihnen immer ein Winkel gleich ist, und die einschließenden Seiten proportionirt sind (I. §. 93.);

2) Aus der Aehnlichkeit dieser Dreiecke folgt, daß die homologen Seiten beider Figuren proportionirt, und der Ordnung nach bei einer gleich großen Anzahl von Seiten alle Winkel gleich sind (I. §. 90. Zus. I.), weßhalb die Figur ABCDE in Grund gelegt ist;

3) Weil die Figuren ähnlich sind, so verhält sich (I. §. 164.) abcde : ABCDE = ab^2 : AB^2.

Nun ist ab im verjüngten Maaße eben so groß, als AB im gewöhnlichen Längenmaaße, und eben so verhält es sich mit ab^2 und AB^2, es gibt also den Flächeninhalt von ABCDE im gewöhnlichen Flächenmaaße an.

§. 163.

II. Aufgabe, eine Figur auf dem Felde in

Grund zu legen, wenn man sie bloß umgehen, und bei ihr an der Gränze die Seiten und Winkel messen kann.

Auflösung:

1) Es sei (Fig. 76.) die Figur ABCDE in Grund zu legen, und ihr Flächeninhalt zu bestimmen, und man könne ihre Seiten und Winkel messen;

2) Man umgehe die Figur, und setze an alle ihre Ecke numerirte Zeichenstäbe;

3) Wenn A der Anfangspunkt der Vermessung ist, so messe man die Seiten AB und AE;

4) Man bringe den Tisch über A, trage den Winkel BAE auf, und mache im verjüngten Maaße auf seinen Schenkeln ab = AB und ae = AE;

5) Man lasse bei A eine Fahne oder einen Stab zurück, messe die Linie ED, und trage am Punkte e den Winkel AED auf, indem man den Tisch so über E stellt, daß e senkrecht über E kömmt, und ea längs EA liegt;

6) Auf die nämliche Art trage man an den übrigen Ecken die Winkel, und im verjüngten Maaße die entsprechenden Seiten auf;

7) Ist man in der Vermessung so weit gekommen, daß man alle Seiten und Winkel außer der vorletzten Seite CB und den beiden anliegenden Winkeln C und B aufgetragen hat, so ist das Vieleck auf dem Meßtische ganz bestimmt (I. §. 54. b.);

8) Zieht man noch von b nach c die gerade Linie bc, so ist abcde der verlangte Grundriß von dem Felde ABCDE, das ist, abcde ∽ ABCDE, und die auf dem Papier aufgetragene Figur ist im verjüngten Maaße der auf dem Felde ausgesteckten gleich, indem auf diese Weise beide Figuren gleich viel Seiten erhalten, dann alle ihre Winkel der Ordnung nach gleich, und die homologen Seiten proportionirt sind (I. §. 90. Zus. I.);

9) Bestimmt man endlich den Flächeninhalt des Grundrisses, so gibt dieser den gesuchten Flächeninhalt des Feldes im gewöhnlichen Flächenmaaße.

Anmerkung: 1) Wenn sich innerhalb der Figur Gegenstände befinden, so dient es zur genaueren Aufnahme, wenn man auch zu diesen Gegenständen Visirlinien zieht, um sich desto sicherer beim Auftragen der Winkel und Seiten immerhin an der Gränze der Figur zu erhalten.

2) Kann man von einem Standpunkte aus die Figur ganz übersehen, und alle ihre Seiten messen, so erhält man den Grundriß, wenn man von diesem Punkte nach allen Ecken Visirlinien zieht, und die gemessenen Seiten auf diese aufträgt; nur sind dann auf dem Meßtische jene Dreiecke unbestimmt, bei welchen zwei Seiten nebst dem Winkel aufgetragen werden, der der kleineren dieser Seiten gegenüber steht (I. §. 35.).

§. 164.

III. Aufgabe, eine Figur in Grund zu legen, wenn man in ihr eine Standlinie messen, und von deren Endspunkten nach allen Ecken visiren kann.

Auflösung:

1) Es sei (Fig. 77.) die Figur ABCDE in Grund zu legen, und ihr Flächeninhalt zu finden, und man könne innerhalb die Standlinie FG messen, und von ihr an alle Ecke der Figur visiren;

2) Man bringe den Meßtisch über F, und ziehe von dem senkrecht darüber stehenden Punkte f sowohl zu allen Ecken der Figur, als auch zum Punkte G Visirlinien;

3) Man messe die Linie FG, trage sie auf der entsprechenden Visirlinie so auf, daß im verjüngten Maaße fg = FG, und bringe den Meßtisch so über G, daß der Punkt g senkrecht über G zu stehen kömmt, und die Linie gf längs GF liegt;

4) Von g aus ziehe man wieder nach allen Ecken Visirlinien, es werden diese die vorigen in den Punkten a, b, c, d und e schneiden; verbindet man diese mit den Linien ab, bc, cd, de und ea, so geben diese im verjüngten Maaße die Entfernungen der Ecke des Feldes, nämlich AB, BC, CD, DE und EA,

und abcde ist der verlangte Grundriß, da man über fg lauter Dreiecke gezeichnet hat, die mit den auf dem Felde ausgesteckten wegen der gleichen Winkel bei f und g ähnlich sind (I. §. 92. Zus.), und aus der Aehnlichkeit dieser Dreiecke die Aehnlichkeit beider Figuren hervorgeht;

3) Bestimmt man endlich im verjüngten Maaße den Flächeninhalt des Grundrisses abcde, so gibt dieser den Flächeninhalt des Feldes im gewöhnlichen Flächenmaaße.

Anmerkung: 1) Wenn man eine Figur aus zwei Standpunkten nicht übersehen kann, oder die Visirlinien zu stumpfe und zu spitzige Winkel bilden, so bestimmt man aus der ersten Standlinie die Lage so vieler Ecke, als es angeht, und aus eben dieser Standlinie mit möglichster Sorgfalt die Lage neuer Standpunkte, um darnach die Lage der übrigen Ecke zu bestimmen.

2) Bei dem Gebrauche des Meßtisches muß man sich immer, ehe man einen Standort verläßt, sorgfältigst durch Nachvisiren überzeugen, daß der Meßtisch in seiner Anfangs bestimmten Lage unverrückt während der Operation geblieben ist.

§. 165.

IV. Aufgabe, zwischen zwei Punkten eine gerade Linie abzustecken und diese zu messen, wenn man von einem dritten Standpunkte aus zu keinem ihrer Endspunkte sehen kann.

Auflösung:

1) Es sei (Fig. 78.) die gerade Linie AB abzustecken und zu messen, wenn man von A nach B nicht visiren, und man auch von einem dritten Standpunkte zu diesen Punkten nicht sehen kann;

2) Wenn man gleich von A nicht unmittelbar in gerader Richtung nach B kommen kann, so kann man es doch durch Umwege, etwa durch die gebrochene Linie ACDEB, und diese bildet mit AB eine Figur, bei der man alle Seiten und Winkel, außer der Seite AB und den anliegenden Winkeln A und B messen kann, und die somit bestimmt ist (I. §. 54. b.);

3)

3) Man lege diese nach §. 163. in Grund, und ziehe im Grundrisse von den Punkten C, D und E die Perpendikel Cf, Dg und Eh;

4) Man bringe den Meßtisch mit dem darauf verzeichneten Grundrisse so über A, daß der entsprechende Punkt a senkrecht über A, und ac genau längs AC kömmt, und visire in der Richtung von ab gegen B;

5) Man messe auf dem Grundrisse die Perpendikel Cf, und Af, trage Af in der Richtung von ab mit dem Längenmaaße auf AB auf, und sehe, ob bei f unter einem rechten Winkel die bestimmten Perpendikel zusammen treffen;

6) Auf eine ähnliche Weise setze man das Verfahren fort, um noch die Punkte g und h in AB zu bestimmen, und dann diese letztere zu messen.

Anmerkung: Um die Aehnlichkeit des Grundrisses mit dem Felde anschaulicher und kenntlicher zu machen, werden

a) die vorkommenden Gegenstände, als Gebäude, Flüsse, Wege, Berge, Aecker, Wiesen, Bäume ꝛc. gezeichnet, und gewöhnlich auch illuminirt;

b) Die Weltgegenden macht man durch die aufgetragene Richtung der Magnetnadel kenntlich; und

c) am Ende wird dem Grundrisse oder Plane der gebrauchte verjüngte Maaßstab beigefügt.

II. Hauptstück.

Die Anwendung der ebenen Trigonometrie auf die Feldmeßkunst.

I. Abschnitt.

Von der Messung der geradlinigten Winkel auf dem Felde, und der Bestimmung unzugänglicher Weiten.

---

§. 166.

Die zur Messung geradlinigter Winkel auf dem Felde erforderlichen Instrumente.

Um geradlinigte Winkel auf dem Felde zu messen, das ist, ihre Größe im Verhältnisse zum rechten Winkel in Graden, Minuten ꝛc. anzugeben, bedarf man nebst den schon genannten Instrumenten eines Instrumentes, welches Astrolab genannt wird.

Dasselbe besteht

a) aus einem Stativ oder Gestell, um in jeder Richtung eine feste Stellung zu erhalten;

b) aus einer Kreisebene, vielmehr einem zirkelförmigen Ringe, welcher, wie die Peripherie eines jeden Kreises überhaupt, in 360 ganze oder 720 halbe Grad abgetheilt ist, um darnach die Größe eines ausgesteckten Winkels in ganzen oder halben Graden, und mittels eines angebrachten Nonius noch genauer angeben zu können;

c) aus einer um das Zentrum beweglichen Regel mit Diopteru, oder einem Tubus, den man in einer senkrechten Ebene auf- und abwärts bewegen kann;

d) aus einem am Mittelpunkte angebrachten, in ganze oder auch halbe Grade abgetheilten Vertikalkreis, um damit Höhen- und Tiefen-Winkel zu messen.

Anmerkung: 1) Mit dem Meßtische werden die Winkel unmittelbar aufgetragen, das heißt, man verzeichnet damit auf dem Papier Winkel, die den auf dem Felde ausgesteckten gleich sind; mit dem Astrolab hingegen gibt man auf dem Felde die Größe der Winkel in Graden, Minuten ꝛc. an.

2) Man kann in einem einzigen Instrumente den Meßtisch und das Astrolab verbinden, indem man eine Kreisebene hat, an deren Zentrum eine Regel mit Dioptern, oder ein Tubus beweglich ist, dann die Peripherie derselben in Grade abgetheilt ist, und man auf ihr ein Papier aufspannen kann, um die Winkel nicht nur allein aufzutragen, sondern auch ihre Größe in Graden ꝛc. anzugeben.

3) Das von Brander in Augsburg verfertigte Astrolab, welches mit mehreren vorzüglichen mathematischen Instrumenten an dem königl. baier. Lyzeum zu Dilingen vorhanden ist, besteht nebst einem in einer Vertikalebene beweglichen Tubus aus einem horizontalen und vertikalen Kreise, um Horizontal- und Vertikal-Winkel messen zu können. Der Horizontalkreis, dessen Durchmesser etwas mehr als einen baierischen Schuh beträgt, ist in 360 Grad eingetheilt, und hat zur genauern Bestimmung der Winkel einen Nonius mit der Eintheilung von drei zu drei Minuten; und der Vertikalkreis, welcher zur Messung der Höhen- und Tiefen-Winkel dient, ist in halbe Grade abgetheilt.

4) Das Astrolab, dem auch ein Versicherungsrohr beigefügt ist, kann zugleich in einen Meßtisch verwandelt werden, indem man die Kreise mit dem Tubus wegnehmen, und dagegen auf das Gestell die Platte eines Meßtisches setzen kann, um mittels eines Diopterlineals die auf dem Felde ausgesteckten Winkel auf dem Papier aufzutragen.

§. 167.

I. Aufgabe, mit dem Astrolab auf dem Felde einen Winkel zu messen.

Auflösung:

1) Es sei (Fig. 62.) der auf dem Felde ausgesteckte Winkel BAC zu messen;

2) Man bringe das Astrolab so über A, daß dessen Zentrum senkrecht über diesen Punkt zu stehen kömmt, und es eine horizontale Lage bekömmt;

3) Man setze das Diopterlineal oder die Regel des Tubus an den Nullpunkt, bei welchem die Eintheilung des Kreises anfängt, und drehe diesen mit dem Tubus, bis man den einen Stab bei B sieht, und somit der Tubus mit der Regel längs des einen Schenkels AB, das ist, mit diesem parallel in der nämlichen Vertikalebene ist;

4) Man befestige den Horizontalkreis, und drehe nur mehr den Tubus mit seiner Regel, bis man den andern Stab bei C sieht.

Zählt man jetzt vom Nullpunkte an die Grade, und am angebrachten Nonius die Minuten, so findet man nach diesen Maaßen die Größe des Bogens, der dem Winkel BAC entspricht, weßhalb der Winkel BAC gemessen ist (I. §. 63. Zus. I. und II.).

Anmerkung: 1) Die Gründe des Verfahrens sind die nämlichen, die früherhin beim Auftragen der Winkel auf dem Meßtische angegeben wurden; es sind nämlich (Fig. 62.) die Visirlinien aE und aD mit AB und AC parallel, und daher ist der Winkel EaD oder bac dem Winkel BAC gleich (I. §. 176.).

2) Auf eine ähnliche Weise verfährt man, wenn man mit einem Astrolab Höhen= oder Tiefen=Winkel messen soll; der Unterschied ist nur, daß in diesem Falle der Tubus in der nämlichen Vertikalebene nach der Richtung der Schenkel des zu messenden Winkels auf= und abwärts bewegt wird.

3) Weil in einem Kreise zu gleichen Sehnen gleiche Zentralwinkel gehören (I. §. 60. Zus. III.) und der Sinus eines spitzigen Winkels der halben Sehne seines doppelten Bogens gleich ist (§. 62. Zus. I.), so lassen sich die Winkel auch mittels gerader Linien messen, das ist, man kann darnach auch ihre Größe in Graden, Minuten ꝛc. angeben.

4) Soll man z. B. (Fig. 39.) einen auf dem Papier verzeichneten Winkel HAB ohne Transporteur trigonometrisch messen (I. §. 64. Anmerk. 1.), so beschreibt man mit einem Halbmesser AB, der etwa die Länge einer tausendtheiligen Skala beträgt, den Bogen DB, es wird dann BH der Sinus des Winkels A, und gibt die Größe dieses letzteren an, oder man kann nach der Skala auch AH oder HB messen, und daraus den Winkel A berechnen (§. 106.).

§. 168.

II. Aufgabe, eine unzugängliche Weite zu finden, wenn man von einem Standpunkte aus zu ihren beiden Endspunkten visiren und messen kann.

Auflösung:

1) Es sei (Fig. 53.) die unzugängliche Weite AB zu finden, und man könne von C zu A und B hinmessen;

2) Man messe mit dem Astrolab den Winkel ACB oder C, und mit einem bestimmten Längenmaaße die Seiten CA und CB;

3) Sind diese zwei Linien gleich, so berechne man die dritte Dreiecksseite AB nach §. 110., indem man AB als Basis und C als Spitze desselben annimmt; sind aber jene Linien ungleich, so suche man die Seite AB nach §. 121., dieselbe ist die verlangte Weite.

Anmerkung: 1) Bezeichnet man, wenn die gemessenen Linien einander gleich sind, diese mit c und a, dann den gemessenen Winkel mit B, und die opponirte Seite als die gesuchte Weite mit b, so gibt die im §. 110. aufgestellte Formel, welche im §. 132. in der II. Tabelle vorkömmt, die verlangte Weite; es ist nach derselben

$$b = \frac{2c \,.\, \text{Sin.}\ \frac{1}{2}\ B}{r} = 2c \times \frac{\text{Sin.}\ \frac{1}{2}\ B}{r}.$$

Sind aber die gemessenen Seiten ungleich, und bezeichnet man sie mit b und c, den gemessenen eingeschlossenen Winkel aber mit A, und die ihm opponirte Seite, welche die verlangte Weite ist, mit a, so findet man nach den im §. 121. aufgestellten Formeln, welche im §. 132. in der III. Tabelle vorkommen, daß

$$a = \sqrt{\left(b^2 + c^2 - \frac{2bc \,.\, \text{Cosin.}\ A}{r}\right)},$$

ferner $m = \frac{1}{2}(B + C) = \frac{1}{2}(180^\circ - A) = 90^\circ - \frac{1}{2} A$,

dann $\text{Tang.}\ n = \frac{\text{Tang.}\ m \times (b - c)}{b + c}$,

wie auch, daß der Winkel $B = m + n$, und $C = m - n$,

weßhalb $a = \frac{b \,.\, \text{Sin.}\ A}{\text{Sin.}\ B}$, oder $a = \frac{c \,.\, \text{Sin.}\ A}{\text{Sin.}\ C}$.

2) Weil schon im II. Abschnitte des II. Hauptstückes der Trigonometrie mehrere Beispiele zur Uebung in der Berechnung unbekannter Stücke angeführt wurden, und da ausführlich die Anweisung vorkömmt, wie man bei Dreiecken zur Bestimmung der unbekannten Stücke die aufgestellten Lehrsätze und Formeln benützen kann, so ist es nicht nöthig, daß wieder neue Beispiele angeführt, und ausführliche Berechnungen vorgenommen werden.

§. 169.

III. Aufgabe, eine unzugängliche Weite zu finden, wenn man von einem Standpunkte aus zu einem ihrer Endspunkte messen kann.

Auflösung:

1) Es sei (Fig. 56.) die Weite AB zu finden, und man könne vom Standpunkte C nach B messen, und von C und B nach A visiren;

2) Man messe mit dem Längenmaaße die Standlinie CB, und die beiden anliegenden Winkel ACB und CBA, oder C und B;

3) Man berechne aus diesen drei bekannten Stücken, nämlich aus der Seite CB und den anliegenden Winkeln C und B die verlangte Weite AB und auch die Linie CA nach §. 119., im Falle man auch wissen will, wie weit der angenommene Standpunkt C vom Punkte A entfernt ist.

Anmerkung: Wie man nach der ersten Anmerkung des vorigen §. mittels der im §. 132. in den Tabellen vorkommenden Formeln die unzugängliche Weite aus den gemessenen zwei Seiten, und dem bekannten eingeschlossenen Winkel bestimmte, eben so kann man auch diese Aufgabe und alle übrigen Aufgaben hinsichtlich der Bestimmung der Weiten und Höhen kürzer trigonometrisch nach den im §. 132. in den Tabellen vorkommenden Formeln auflösen, wenn man allemal die Seiten und Winkel der Dreiecke mit den angegebenen Buchstaben bezeichnet.

§. 170.

IV. Aufgabe, eine unzugängliche Weite zu

finden, wenn man von einer Standlinie aus zu ihren beiden Endspunkten visiren, aber zu ihnen nicht hinmessen kann.

Auflösung:

1) Es sei (Fig. 58.) die Weite AB zu finden, und man könne von den Endspunkten D und E, und einem der mittleren Punkte C der angenommenen Standlinie DE nach A und B visiren;

2) Man messe die Linien DC und CE, und an den Punkten D, C und E die Winkel m, t, C, s und p;

3) Aus der Seite DC und den anliegenden Winkeln m und t berechne man im Dreiecke ADC die Seite CA, und im Dreiecke CBE aus der Seite CE und den anliegenden Winkeln s und p die Seite CB nach §. 119.;

4) Weil der Winkel C oder ACB durch Messung bekannt ist, und die einschließenden Seiten CA und CB durch Rechnung gefunden werden, so suche man aus diesen drei Stücken die verlangte Weite AB nach §. 121.

Zusatz: Man kann (Fig. 60.) von der Standlinie FG aus die unzugängliche Weite AB ebenfalls finden, wenn man sowohl die Standlinie FG als auch an ihren Endspunkten die Winkel m, n, p und q, somit die Winkel AFG und FGB mißt, indem m + n = AFG und p + q = FGB.

In dem Dreiecke AFG kann man aus der Seite FG und den anliegenden Winkeln p und AFG die Seite FA, und im Dreiecke FGB aus der Seite FG und den Winkeln n und FGB die Seite FB nach §. 119. berechnen, und aus den gefundenen Seiten FA und FB und dem gemessenen eingeschlossenen Winkel m die gesuchte Weite AB bestimmen (§. 121.).

Eben so kann man im Dreiecke FGB aus der Seite FG, und den Winkeln n und FGB die Seite GB, und im Dreiecke AFG aus FG und den Winkeln p und AFG die Seite GA, und aus den Sei-

ten GA, GB und dem eingeschlossenen Winkel q die verlangte Weite AB berechnen.

Anmerkung: 1) Es dient zur Probe für die Richtigkeit der Auflösung, wenn man (Fig. 60.) nach der im vorstehenden Zusatze angegebenen Vorschrift die unzugängliche Weite AB sowohl aus den Seiten AF und FB und dem Winkel m, als auch aus den Seiten GA und GB und dem Winkel q berechnet.

2) Wie man trigonometrisch eine unzugängliche Weite finden kann, wenn man von keinem Standpunkte aus zu ihren beiden Endspunkten zugleich visiren kann, wird in der Polygonometrie gezeigt werden.

II. Abschnitt.

Von dem Verfahren, trigonometrisch Höhen zu messen, und sowohl Figuren in Grund zu legen, als auch ihren Flächeninhalt zu finden.

---

§. 171.

I. Aufgabe, die Höhe eines Gegenstandes zu finden, wenn man in der nämlichen Vertikalebene eine horizontale Standlinie bis zum Gegenstande messen kann.

Auflösung:

1) Es sei (Fig. 79.) die Höhe AB zu finden, und mit ihr in der nämlichen Vertikalebene könne man die horizontale Standlinie CB messen;

2) Denkt man sich am Astrolab vom Zentrum des Vertikalkreises, mit dem man die Höhen- oder Tiefen-Winkel mißt, mit CB bis zur Höhe die Parallele DE, so ist, weil DC ⫲ EB, die Standlinie CB = DE, und DC = EB (I. §. 41. Zus. IV.);

3) Man messe die Standlinie CB, und vom Standpunkte C den Winkel ACB, vielmehr von D aus den Vertikal- oder Höhen-Winkel ADE, und berechne

nach §. 107. aus diesem Winkel und der Linie DE = CB das Perpendikel AE;

4) Zum gefundenen Perpendikel AE addire man die Höhe des Instrumentes DC, und man hat die verlangte Höhe AB gefunden, da DC = EB, und AB = AE + EB, weßhalb AB = AE + DC.

§. 172.

II. Aufgabe, die Höhe eines Gegenstandes zu finden, wenn man in der horizontalen, in der nämlichen Vertikalebene liegenden Standlinie nicht ganz bis zur Höhe hinmessen kann.

Auflösung:

1) Es sei (Fig. 80.) die Höhe AB zu finden, und man könne mit ihr in der nämlichen Vertikalebene die horizontale Standlinie nur von D bis C messen;

2) Man messe diese Linie DC, und von ihren Standpunkten D und C, vielmehr, wenn ED oder FC die Höhe des Astrolabs beträgt, von den Punkten E und F aus die Vertikal- oder Höhen-Winkel m, p und n, das ist, die Winkel AEF, EFA und AFG;

3) Aus der Seite EF, welche = DC, und den anliegenden Winkeln m und p berechne man im stumpfwinklichten Dreiecke EFA die Seite FA nach §. 119., und im rechtwinklichten Dreiecke FAG berechne man nach §. 106. aus der Seite FA, und dem spitzigen Winkel n oder AFG das Perpendikel AG, und addire zu AG die Höhe des Astrolabs ED oder FC, und man hat die gesuchte Höhe AB gefunden, welche = AG + FC = AG + ED.

Anmerkung: Wenn es auch nicht besonders angezeigt und bemerkt wird, so muß doch immerhin auf die Höhe des Instrumentes und darauf Rücksicht genommen werden, daß die Höhen- oder Tiefen-Winkel nicht von den auf dem Boden angenommenen Punkten, sondern allemal vom Mittelpunkte des Vertikalkreises aus am Instrumente gemessen werden.

§. 173.

III. Aufgabe, die Höhe eines Gegenstandes zu finden, wenn mit ihr die angenommene Standlinie nicht in der nämlichen Vertikalebene ist.

Auflösung:

1) Es sei (Fig. 81.) die Höhe AB zu finden, und die horizontale Standlinie CD sei mit ihr nicht in der nämlichen Vertikalebene;

2) Man messe die Linie CD, und an ihren Endspunkten C und D mit dem Astrolab sowohl die Horizontalwinkel m und n, als auch die Vertikalwinkel p und q;

3) Aus der Seite CD und den anliegenden Winkeln m und n berechne man die horizontalen Linien CB und DB nach §. 119., und aus der gefundenen Linie CB und dem gemessenen Vertikalwinkel p, oder aus der Linie DB und dem Winkel q berechne man nach §. 107. die verlangte Höhe AB.

Anmerkung: Bei dieser Auflösung dient es zur Probe, wenn man die Höhe AB sowohl aus den Stücken CB und p, als auch aus den Stücken DB und q zugleich berechnet.

§. 174.

IV. Aufgabe, die Höhe eines Gegenstandes zu finden, wenn die angenommene Standlinie nicht horizontal ist.

Auflösung:

1) Es sei (Fig. 82.) die Höhe AB zu finden, und die angenommene Standlinie EC sei nicht horizontal;

2) Man messe die Linie EC, und an ihren Endspunkten E und C die Winkel n und f, und zugleich am Punkte C die Winkel m und p;

3) Aus der Seite EC und den anliegenden Winkeln n und f berechne man die Seite AC nach §. 119., und aus der Seite AC und dem Winkel m berechne

man nach §. 106. das Perpendikel AD, und die horizontale Linie CD;

4) Endlich berechne man aus der Linie CD und dem Winkel p das Perpendikel DB nach §. 107., und addire dieses zu AD, man hat auf diese Weise die verlangte Höhe AB gefunden, welche = AD + DB.

§. 175.

V. Aufgabe, ein Feld in Grund zu legen und dem Flächeninhalte nach zu berechnen, wenn man von einem innerhalb angenommenen Standpunkte zu allen Ecken sehen und messen kann.

Auflösung:

1) Man soll (Fig. 75.) das Feld ABCDE in Grund legen und berechnen, und man könne von einem innerhalb angenommenen Standpunkte F zu allen Ecken gerade Linien messen, welche mit den Polygons-Seiten Dreiecke bilden, die zusammen genau den Flächeninhalt der Figur geben;

2) Man messe mit dem Astrolab rings um den Punkt F herum alle Winkel, nämlich AFB, BFC, CFD, DFE und AFE, und mit dem Längenmaaße von F aus an alle Ecke die geraden Linien FA, FB, FC, FD und FE;

3) Man verzeichne, um die Figur in Grund zu legen, an einem auf dem Papier bestimmten Punkte F der Ordnung nach alle gemessenen Winkel mit dem Transporteur (I. §. 64. Anmerk. 1.), trage mit dem verjüngten Maaßstabe die gemessenen Linien FA, FB, FC, FD und FE auf, und verbinde die Durchschnittspunkte a, b, c, d und e mit den geraden Linien ab, bc, cd, de und ea, es ist die Figur abcde dem Felde ABCDE ähnlich (I. §. 93. und §. 90. Zus. 1.), und deßhalb das letztere in Grund gelegt;

4) Berechnet man jetzt nach §. 121. aus den gemessenen Linien und Winkeln den Flächeninhalt eines jeden Dreieckes, und bringt man alle Dreiecke in eine

Summe, so hat man den verlangten Flächeninhalt der ganzen Figur, indem hier Polyg. ABCDE = △ AFB + △ BFC + △ CFD + △ DFE + △ EFA.

Anmerkung: Ist die Gränze der Figur so beschaffen, daß sie nicht genau in solche Dreiecke von einem innerhalb liegenden Punkte aus getheilt werden kann, so wählt man eine andere Vermessungsmethode, um sie in Grund zu legen und zu berechnen.

§. 176.

VI. Aufgabe, eine Figur in Grund zu legen, und ihren Flächeninhalt zu bestimmen, wenn man auf dem Felde ihre Seiten und Winkel messen kann.

Auflösung:

1) Es soll (Fig. 76.) die Figur ABCDE in Grund gelegt und berechnet werden, und man könne an ihrer Gränze so viele Seiten und Winkel messen, als zu ihrer Bestimmung erforderlich sind (I. §. 54.);

2) Man messe die Seiten und Winkel, verzeichne letztere auf dem Papier mit dem Transporteur, erstere aber trage man mit dem verjüngten Maaßstabe auf, und man erhält den verlangten Grundriß;

3) Theilt man das Vieleck durch die Diagonalen in Dreiecke, und berechnet man, da sie durch die Seiten und Winkel des Vieleckes bestimmt sind, trigonometrisch ihren Flächeninhalt, so gibt die Summe aller Dreiecksflächen den Flächeninhalt der ganzen Figur.

Anmerkung: 1) Werden bei einer Figur alle Seiten und Diagonalen, durch welche sie in Dreiecke getheilt wird, auf dem Felde gemessen, so kann man aus diesen Stücken trigonometrisch sowohl den Flächeninhalt eines jeden Dreieckes, und deßhalb auch den Flächeninhalt der ganzen Figur, als auch die Vieleckswinkel berechnen (§. 122.).

2) In der Polygonometrie oder vielmehr in der Goniometrie wird gezeigt werden, wie man aus den gemessenen Seiten und Winkeln die übrigen noch unbekannten Seiten und Winkel und den Flächeninhalt

dadurch bestimmen kann, daß man für eine gewisse Basis die Abszissen und Ordinaten berechnet.

3) Der Kürze wegen wurde hier von der Vertheilung oder Zerstückelung der Figuren nichts mehr gesagt, da dieses ohnehin aus den größern Lehrbüchern der praktischen Geometrie und Trigonometrie erlernt werden muß.

4) Die angeführten Vermessungs-Methoden waren:

a) Die Triangulär-Methode, bei welcher die Figur durch Diagonalen in Dreiecke getheilt wird;

b) Die Perpendikulär- oder Parallel-Methode, wenn man dieselbe durch Perpendikel in Trapeze theilt; und endlich

c) die Methoden der Zentral- und Peripheral-Vermessung, bei welchen die Figur von einem innerhalb angenommenen Standpunkte aus, oder bloß an ihrer Gränze gemessen wird.

5) Nebst den angeführten Schriften empfehlen sich rücksichtlich der praktischen Geometrie und Trigonometrie unter den älteren Werken die Elemente der Arithmetik, Algebra und Geometrie, welche in lateinischer Sprache Herr Ignaz Pickel als Professor der Mathematik an der ehemaligen Universität zu Dilingen im Jahre 1774 bei Joh. Leonhard Brönner herausgab.

Unter den neuern Schriften ist wegen seiner eben so gründlichen als deutlichen und ausführlichen Darstellung des Gegenstandes vorzüglich das Werk zu empfehlen, welches der königl. baier. Hofrath und Professor der höheren Mathematik zu München, Herr Leonhard Späth, im Jahre 1818 zu Nürnberg bei Riegel und Wießner unter dem Titel herausgab: »Die praktische Geometrie,« angewandt für die Aufnahme großer Distrikte, der Flur-, Aemter- und Profil-Charten, so wie der Gemeindetheilungen, der Taxation, Arrondirung und Zerschlagung der Güter u. s. w. I. Theil.

Verbesserungen.

Seite	Zeile	anstatt	lese man
5	11	Oktaider	Oktaeder
6	26	eso	rso
7	40	mc	ml
7	41	ae	al
8	3	ae	al
8	16	edb	ebc
8	18	dcb	edc
15	17	AD, BE rc.	AD, AE rc.
24	23	nun AJ	nun ist AJ
25	35	SU	HU
38	19	AK	AK^2
45	25	ihr	ihm
50	1 rc.	F und G	A und B
53	18, 20 rc.	R und H	R und K
53	37	dieses Kreises	der Kugel
59	33	DPFH	DFKR
88	25	(I. §. 152. Zus. IV.)	(I. §. 153. Zus. IV.)
91	5	r^5	r^3
95	4, 11 rc.	Hexarder, Tetrarder rc.	Hexaeder, Tetraeder rc.
95	14	dritten	dritten Theil
95	28 u. 29	den Kubikinhalt einer dieser Pyramiden	den Inhalt einer Seitenfläche
97	29	$2 B = B$	$2 B + B$
120	14	AE^2	AE
152	11	aber	also
161	4	$\text{Tang. a} = \frac{\text{Sec. 2a} + 1}{\text{Tang. 2a}}$	$\text{Tang. a} = \frac{\text{Sec. 2a} - 1}{\text{Tang 2a}}$
171	21	Sin. 20°	Sin. 30°
202	29	303 □	303 □ Ruthen
205	1	oder q	oder p
205	6	Sin. q,	Sin. p,
284	22	$44, 8^2 = \sqrt{3}$	$44, 8^2 \times \sqrt{3}$.

Bei Fig. 16. soll vom Punkte F eine Linie FG auf BC senkrecht stehen;

Bei Fig. 25. soll von C zu G die gerade Linie CG gezogen, und von D auf FG das Perpendikel Dm gefällt sein; und endlich

Bei Fig. 27. soll am Ende der vom Punkte N für den Winkel NAM errichteten Tangens der Buchstabe R anstatt B stehen.

Bei dem Verleger dieses Buchdrucker und Buchhändler Dannheimer in Kempten sind auch kürzlich erschienen und in allen Buchhandlungen zu haben:

Aline: oder kleines Lesebuch für die obere Klasse der Mädchenschulen. gr. 8. 30 kr.

Böhm, J. Leonh., Schulunterricht über Lyrische Dichtung. gr. 8. 1 fl. 36 kr.

Bundschue, J. v. G., Lehrbuch der Arithmetik zum Gebrauche in Schulen und zum Selbstunterrichte. 1r Theil, welcher das Numeriren und die vier Rechnungsarten in ganzen unbenannten und benannten Zahlen, wie auch eine Anleitung zum Kopfrechnen, und Tabellen über die baier. Maaße und Gewichte enthält. 2te vermehrte Auflage. 8. 48 kr.

—— Dasselbe 2r Theil, welcher die gemeinen Brüche und die Auflösung der Aufgaben der Regel Detri, Duplex, Triplex ꝛc. und die reesische und Kettenregel, wie auch eine Anleitung zur Auflösung dieser Aufgaben nach der wälschen Praktik und mittels Kopfrechnens enthält. 2te verm. Auflage. 8. 54 kr.

—— Dasselbe 3r Theil, welcher die Dezimal- u. Sexagesimal-Brüche, die Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzeln in Zahlen, wie auch die Elemente der Buchstabenrechnung, und mehrere Tabellen in Betreff verschiedener alten und neuen Maaße, Gewichte ꝛc. enthält. 8. 2te vermehrte Auflage 1 fl.

—— Dasselbe 4r Theil, welcher die allgemeinen Quadrirungs- und Kubirungsgesetze mit den daraus für die Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzeln abgeleiteten Regeln, dann die Auflösung einfacher Gleichungen mit mehreren unbekannten Größen, und die der quadratischen und unbestimmten, wie auch die arithmetischen und geometrischen Verhältnisse, Proportionen und Progressionen, die Lehre von den Logarithmen, und das newtonianische Binomium sammt den Permutationen und Kombinationen enthält. 8. 1 fl. 30 kr.

—— Lehrbuch der Geometrie und Trigonometrie zum Gebrauche in den Schulen und zum Selbstunterrichte. 1r Theil, welcher die Longimetrie und Planimetrie enthält. Mit 9 Figuren-Tafeln. 8. 1 fl. 30 kr.

Cammerer, Ans. Andr. Kasp., Praktische Anleitung zum Uebersetzen aus dem Deutschen ins Lateinische, mit fortlaufender Hinweisung auf die Regeln der kleinen und großen Bröderschen, wie auch der Wenkschen, von Grotefend verbesserten Grammatik. 3te verb. und verm. Auflage. gr. 8. 1 fl.

—— Lehrbuch der Erdbeschreibung für Schulen und zum Selbstunterrichte. Dritte vermehrte und verbesserte Auflage. gr. 8. 1 fl. 30 kr.

—— Grundriß der allgemeinen Weltgeschichte für Schulen und zur Selbstbelehrung. 2te verbesserte und vermehrte Auflage. gr. 8. 1821. 45 kr.

—— Das Königreich Baiern, nach seiner neuesten Eintheilung in acht Kreise, für die vaterländischen Schulen

dies- und jenseits des Rheins. Zweite vermehrte und verbesserte Auflage. 12. 15 kr.

Grieser, J. G., Neues deutsches orthographisches Wörterbuch, nebst einleitenden Bemerkungen über einige Hauptpunkte der deutschen Rechtsprech- und Rechtschreiblehre. Zum Gebrauche in Schulen. gr. 8. 1 fl.

—— Nuova Grammatica Italiana, oder kurze Sprachlehre für Jedermann, der die italiän. Sprache bald und doch gründlich erlernen will. Mit italiän. Lesestücken und italiänisch-deutschen Gesprächen. gr. 8. 48 kr.

—— Genaue Berechnung der größten Wirksamkeit verschiedener Wassermaschinen aus bekannten physischen Stücken. 8. 12 kr.

—— Tabelle der lat. Deklinationen. 2te verb. Aufl. gr. Folio 4 kr.

Katechismus der kön. baier. Gesetze und Verordnungen zum nothwendigen Gebrauch für Zivil- und Militär-Beamte, Geistliche, Magistrats-Personen, Rechts-Anwälde, Bürger, Gemeinde-Vorsteher, Lehrer, so wie für jeden Landmann, und überhaupt für das ganze baier. Volk. 1tes Heft, enthaltend das Gemeinde- und Stiftungs-Wesen. gr. 8. in farbigem Umschlag brochirt 28 kr.

—— Derselbe 2tes Heft, enthaltend die Gemeinde-Wahlordnung. gr. 8. in farbigem Umschlag brochirt 28 kr.

—— Derselbe 3tes Heft, enthaltend die Brandversicherungs-Ordnung. gr. 8. in farbigem Umschlag brochirt 32 kr.

—— Derselbe 4tes Heft, enthaltend das Edikt über die Ständeversammlung. gr. 8. in farbigem Umschlag broch. 48 kr.

Jedes Heft wird auch einzeln abgegeben.

Klotz, G., Das fromme Andenken zur treuen Nachfolge, dargestellt an dem heiligen Magnus, Abte zu Füssen. 12. 9 kr.

Messe, die heilige, an allen Sonn- und Feiertagen des Jahrs, aus dem Latein ins Deutsche übersetzt, mit einem Anhang von Beicht-, Communion- und andern Gebeten. Vierte vermehrte Auflage. 8. 1 fl.

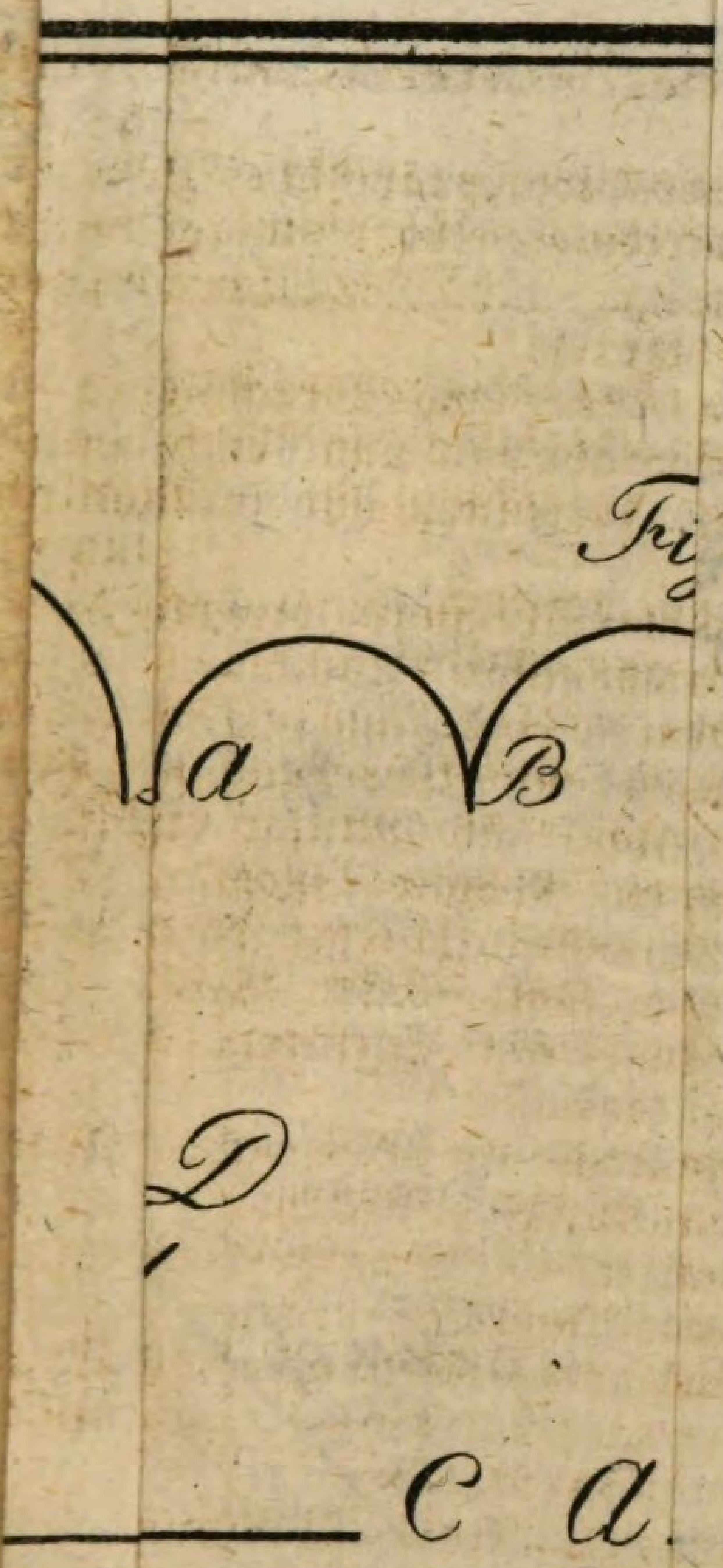
—— Auf Schreibpapier 1 fl. 15 kr.

Miller, Fr. Der Leinwandhandel, eine vorzügliche Quelle des vaterländischen Wohlstandes. Ueber die Ursache seiner Stockung, seines Verfalls und die Mittel, dem drohenden Untergange zu entgehen. gr. 8. 30 kr.

Schwemmer, Jos., Provisorische Taxordnung des Königreichs Baiern in Beziehung auf die Verhandlungen der nicht contentiosen Gerichtsbarkeit. Nach dem Edikte vom 8. Okt. 1810 und den seither hierüber erschienenen Erläuterungen, alphabetisch nebst dem Siegelmandat und den hierüber erschienenen Novellen bearbeitet. Zweite Auflage. gr. 8. 48 kr.

Tabelle der Rechtschreibung. Zweite verbesserte Aufl. 4 kr.

—— über sämmtliche Veränderungsarten aller beweglichen oder veränderlichen Redetheile 8 kr.



Fi
a
B
D
C
A.

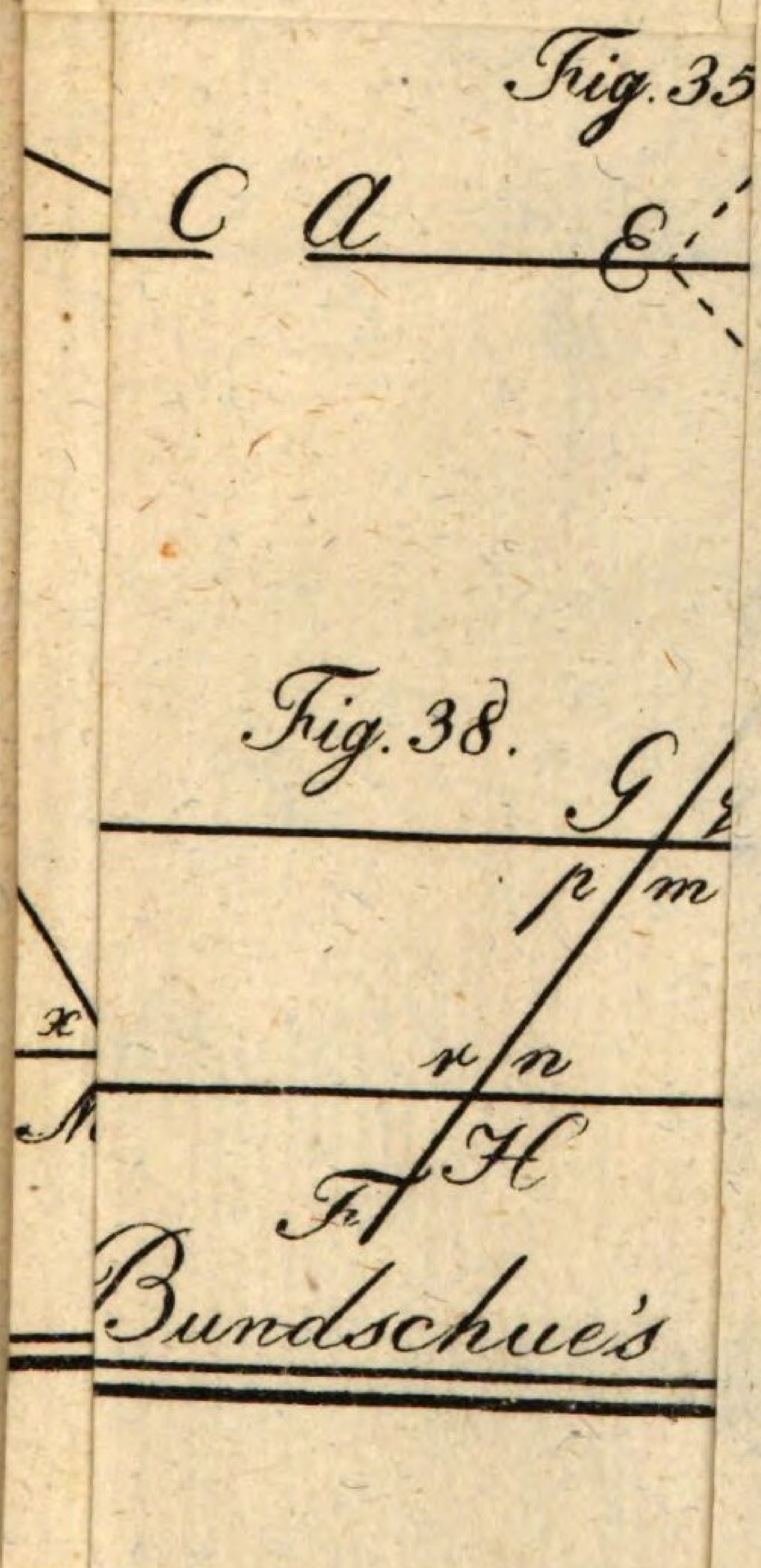
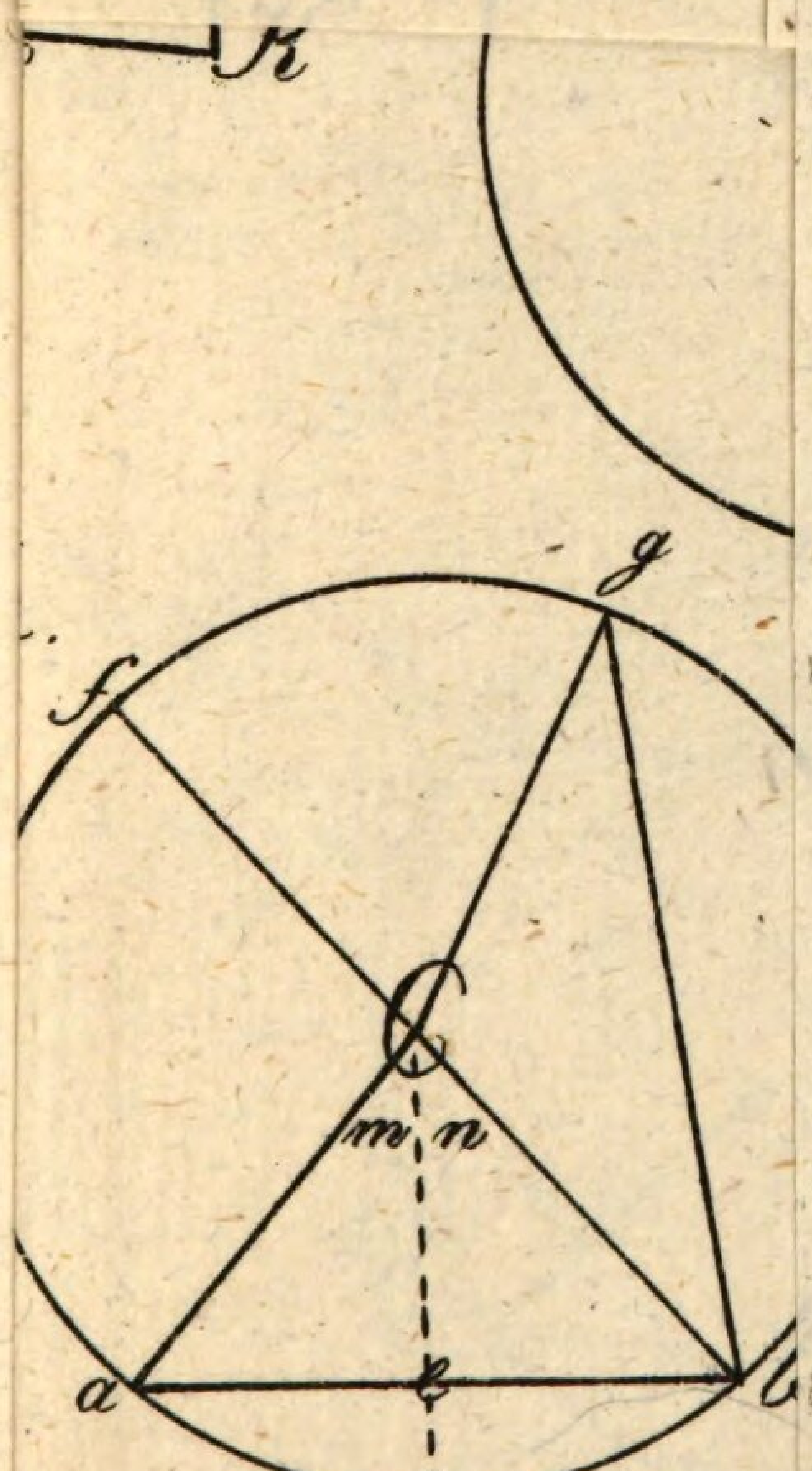
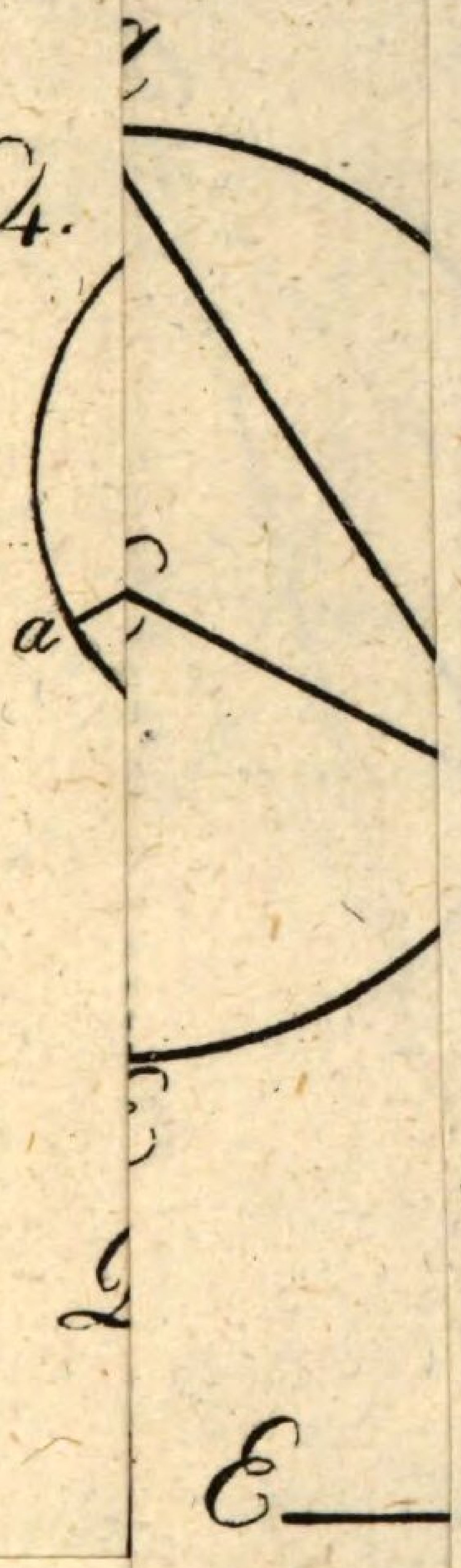


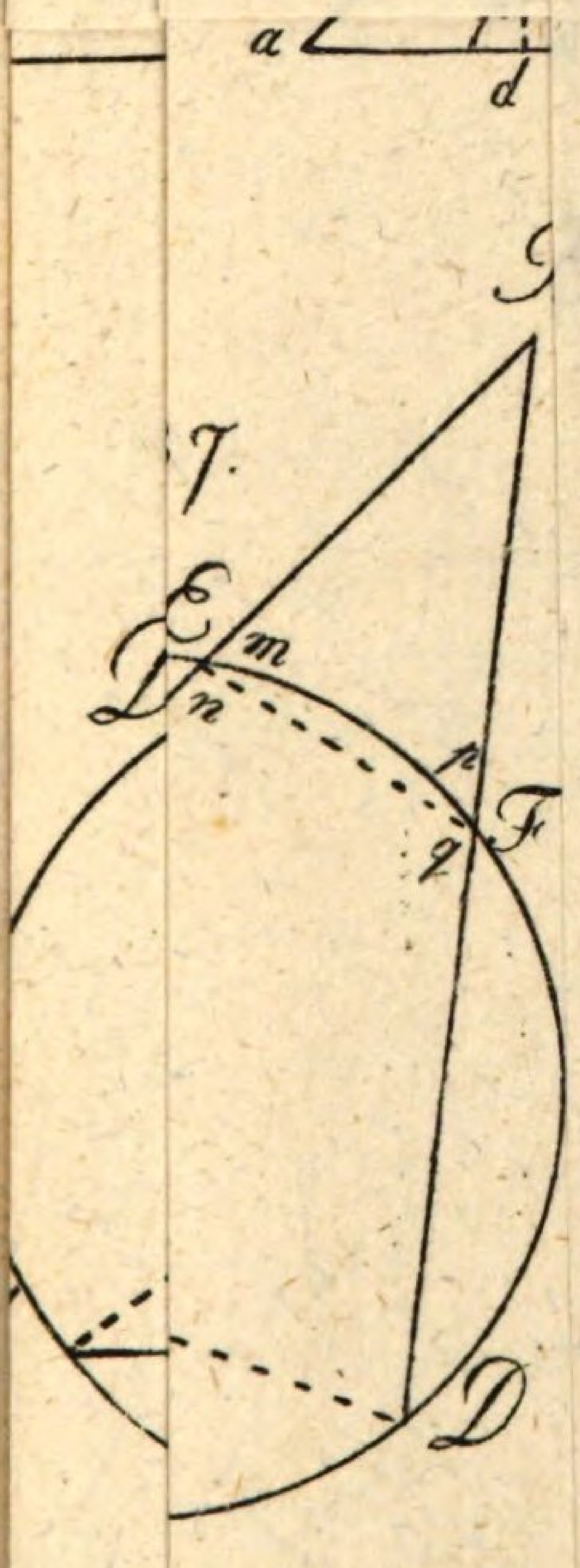
Fig. 35
C
A
E
Fig. 38.
G
p
m
x
r
n
N
H
F.
Bundschue's



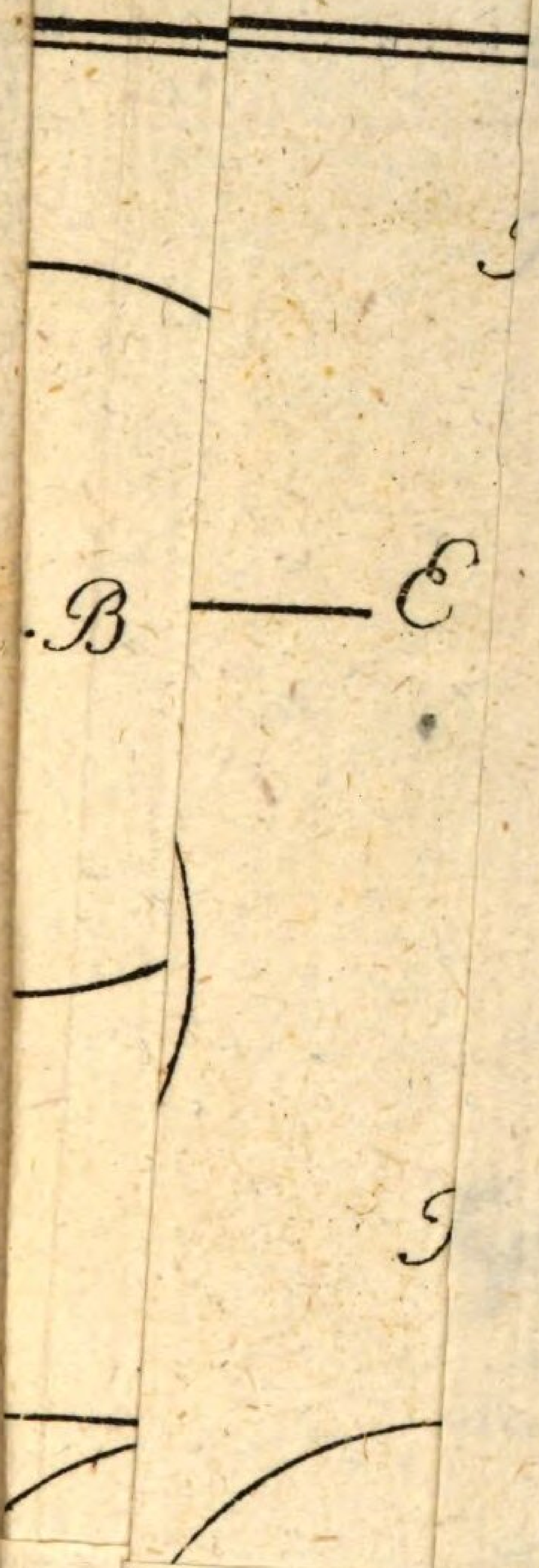
Bundschue's

64.





Bundsc


B
E
F

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Bundschue, Johann von Gott, 1784-1851

Lehrbuch der Geometrie und Trigonometrie zum Gebrauche in den Schulen und zum Selbstunterrichte

Bd.: 2

Kempten 1822

Math.p. 59 k-2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081549-3